

BACHELORARBEIT

BIFURKATIONSANALYSE
AGENTENBASIERENDER MODELLE

EIN BEISPIEL AUS DER ECONOPHYSIK

BIFURCATION ANALYSIS OF AGENT
BASED MODELS

AN EXAMPLE FROM ECONOPHYSICS

Tobias Wand

E-Mail: tobiaswand@gmx.de

Martikeldnummer: 430220

im Sommersemester 2018

Gutachter:

Dr. Oliver KAMPS

Prof. Dr. Uwe THIELE

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	3
2	Einführung	4
2.1	Anmerkungen	4
2.2	Econophysik	4
2.3	Agentenbasierte Modelle	6
2.4	Ergebnisse und Erfolge der Econophysik: Stilisierte Fakten . .	7
2.4.1	Potenzgesetze	8
2.4.2	Volatilitäts-Clustering	9
2.4.3	Krisen und Blasen	10
2.4.4	Fazit: Econophysik und Agentenbasierte Modelle . . .	10
2.5	Das Modell Mark 0	11
2.5.1	Der Modellaufbau	11
2.5.2	Verhaltensregeln der Firmen	12
2.5.3	Buchführung der Firmen	13
2.6	Bifurkation und Stochastische Kontinuierung	15
2.6.1	Bifurkation	16
2.6.2	Numerische Kontinuierung	17
2.6.3	Stochastische Kontinuierung	19
3	Untersuchung von Mark 0: Phasendiagramme	22
3.1	Analyse von R: Ungleichgewicht zwischen Einstellungen und Entlassungen	22
3.2	Der Phasenraum (R/Θ)	26
3.3	Weiterführende Untersuchungen der Phasen RU und EC . . .	28
3.3.1	Die Phase RU	28
3.3.2	Die Phase EC: Eruptionen	30
3.3.3	Übergang von EC nach RU	33
3.4	Zwischenfazit	34
4	Modellerweiterung: Globalisierung	35
4.1	Durchlässigkeit zwischen den Wirtschaftsräumen	35
4.2	Unterschiedliche Systeme	36
4.3	Identische Systeme	40

5	Bifurkation und Hysterese	41
5.1	Hysterese	41
5.2	Stochastische Kontinuierung von Mark 0	42
5.3	Ergebnisse der Kontinuierung	43
6	Fazit und Ausblick	46
7	Literatur	48
8	Anhang	51
8.1	Symbolverzeichnis	51
8.2	Anmerkungen zur Stochastischen Kontinuierung	51
8.3	Code von Mark 0	52

1 Kurzfassung

Beim Kleinen beginnt alles, und je größer und mächtiger etwas werden soll, desto langsamer und scheinbar mühsamer wächst es.

- Jeremias Gotthelf

Die vorliegende Arbeit untersucht das nicht-deterministische, agentenbasierte Modell „Mark 0“ aus der Econophysik [1]. Ziel der Arbeit ist es zunächst, das Modell erfolgreich zu implementieren und die aus der Literatur bekannten ökonomischen Phasen und Phasendiagramme zu reproduzieren. Nachdem dies erfolgreich umgesetzt wird, wird die Analyse der Phasen des Modells über das Maß von [1] hinaus fortgeführt und eine weitere Modellerweiterung betrachtet, in der eine globalisierte Wirtschaft nachgestellt wird, bei der zwei Wirtschaftsräume miteinander in Verbindung gebracht werden.

Das ursprüngliche Modell Mark 0 wird mithilfe der Stochastischen Kontinuierung untersucht, mit der das beobachtete Hystereseverhalten von Mark 0 genauer analysiert werden soll. Ebenso wird hiermit untersucht, ob die Stochastische Kontinuierung sich als geeignete Analysemethode für agentenbasierte Systeme anbietet. Die Methode der Stochastischen Kontinuierung wird an das Modell Mark 0 angepasst, sodass es möglich ist, einen Teil des Bifurkationsdiagramms über die Stochastische Kontinuierung zu erstellen und auch einen Abschnitt des instabilen Astes darzustellen. Es gelingt zwar nicht, das Bifurkationsdiagramm vollständig nachzubilden, dennoch zeigt sich, dass die Stochastische Kontinuierung sich als sinnvolles Werkzeug zur Untersuchung von agentenbasierten Modellen erweist.

2 Einführung

Zu einem guten Ende gehört auch ein guter Beginn.

- Konfuzius

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse des Modells Mark 0, wie es z.B. von Bochaud in [1] diskutiert wird. Mark 0 ist ein agentenbasiertes Modell aus der Econophysik, ein interdisziplinäres Feld, das ökonomische Fragestellungen mit Modellierungen aus der theoretischen Physik zu beantworten versucht. Zunächst erfolgt daher eine Einführung in die Econophysik, bevor die Prinzipien der agentenbasierte Modelle erläutert werden, um schließlich das Modell Mark 0 selbst zu erklären. Zum Ende dieses Kapitels wird die Stochastische Kontinuierung vorgestellt: Eine Analysemethode aus der nichtlinearen Physik, die im Rahmen dieser Bachelorarbeit auf das Modell Mark 0 angewandt wird.

2.1 Anmerkungen

Sofern nicht anders gekennzeichnet, wurden die Abbildungen in der vorliegenden Arbeit mit matplotlib erstellt. Im Anhang befindet sich unter 8.1 zur Lesefreundlichkeit ein Symbolverzeichnis der Variablen und Parameter, die im Modell Mark 0 genutzt werden.

2.2 Econophysik

Econophysik (engl. Econophysics) ist die Behandlung ökonomischer Probleme mit dem Mitteln der statistischen Physik und wurde als Begriff 1995 von H. E. Stanley eingeführt [2]. Es ist zunächst verwunderlich, welchen Nutzen die naturwissenschaftlichen Theorien für die Beschreibung der Ökonomie erbringen kann: Ziel der Physik ist es, die Welt auf einige wenige Prinzipien und Theorien für das Verhalten der Teilchen, die unsere Materie aufbauen, herunterzubrechen, sodass sich alle beobachtbaren Phänomene aus diesen Theorien herleiten lassen. Auch die Wirtschaftswissenschaften haben Ansätze wie den Homo Oeconomicus hervorgebracht, nach dem alle Menschen als interagierende Akteure in wirtschaftlichen Prozessen nach den exakt gleichen Verhaltensvorschriften handeln. Doch ist dies anders als z.B. die ununterscheidbare Gleichheit aller Elektronen eine bewusste Vereinfachung der

Realität. Wieso sollte die Verknüpfung zwischen der Naturwissenschaft Physik und der Gesellschaftswissenschaft Ökonomie daher sinnvoll sein?

Im Verlauf der Geschichte der Physik zeigt sich, dass die exakte Beschreibung vieler Prozesse nahezu unmöglich ist, da eine Vielzahl an Wechselwirkungen dafür zu betrachten sind. Daher entwickelte sich beispielsweise aus der Mechanik als Studium der Einteilchen- und später Mehrteilchen-Bewegungen die statistische Mechanik als Teildisziplin der Physik, um viele der auftretenden Probleme handhabbar zu machen. Die Erforschung der nichtlinearen, komplexen Systeme wurde zu einem etablierten Teilbereich der Physik, doch der mathematische Hintergrund dieser Systeme ließ sich nicht nur in den Modellen der Physik wiederfinden, sondern auch in anderen Naturwissenschaften und den Gesellschaftswissenschaften [2].

Doch schon zuvor gab es wechselseitige Einflüsse zwischen Physik und Ökonomie, wie beispielsweise die mathematische Ausformulierung der Brownschen Bewegung, welche die Grundlage der Beschreibungen von makroskopischen Teilchenbewegungen in viskosen Medien ist, als sogenannter Random Walk. Die erste Formalisierung der Random Walks als stochastischer Prozess erfolgte durch Bachelier in seiner Dissertation „Theorie de la speculation“, um die Preise von Optionen in Finanzmärkten zu beschreiben. Erst einige Jahre später führten Arbeiten von Einstein, Smolukowski und Langevin über die Brownsche Molekularbewegung die Theorie der stochastischen Prozesse in das mathematische Repertoire der Physik ein, während sie in der Ökonomie als Basis des Black-Scholes-Modells für die Beschreibung von Aktienkursverläufen etablierte [24]. Seitdem ist die Analyse von stochastischen Prozessen ebenso ein Berührungspunkt zwischen Physik und Ökonomie, an dem die Econophysik ansetzen kann [4].

Aber auch jenseits der mathematischen Modellierung existiert eine Verwandtschaft zwischen ökonomischen und naturwissenschaftlichen Ideen. So wurde z.B. Darwins Theorie der natürlichen Selektion durch die „Bevölkerungstheorie“ des Ökonomen Malthus inspiriert und weist auch einen ähnlichen Wesensgehalt wie Adam Smiths „Unsichtbare Hand“ auf [2]. Es zeigen sich demnach verschiedene Möglichkeiten der Econophysik auf, durch ihre fachübergreifende Arbeitsweise zur Forschung beizutragen.

2.3 Agentenbasierte Modelle

Ein agentenbasiertes Modell (engl. Agent-Based Model) ist eine Computersimulation eines Modells, das eine Vielzahl diskreter Agenten beinhaltet. Dass jeder dieser Agenten diskret ist, bedeutet, dass er durch einen Satz von Variablen repräsentiert wird, die in klarer Abgrenzung zu seiner Umwelt stehen. Agentenbasierte Modelle werden eingesetzt, um Systeme zu simulieren, in denen eine Vielzahl an Individuen nach vorgegebenen Handlungsregeln agieren.

Die Agenten interagieren miteinander und mit ihrer Umwelt anhand von fest vorgegebenen Regeln, die das zu untersuchende Modell widerspiegeln [3]. In Mark 0 beispielsweise sind die Agenten einzelne Firmen, einige ihrer Variablen sind die Produktionsmengen ihrer Verkaufsgüter und deren Verkaufspreise. Die Umwelt repräsentiert die Konsumenten und z.B. deren Konsumbudget. Eine vorstellbare Regel für die Agenten wäre, bei einem geringeren Konsumbudget als im vorherigen Zeitschritt die Variable „Preis“ zu reduzieren: Haben die Konsumenten weniger Geld, werden die Preise gesenkt.

Es ist naheliegend, dass das Verhalten der Agenten durch (mathematische) Regeln bestimmt wird. So lässt sich obiges Beispiel konkretisieren zu der Verhaltensregel: Sinkt das Konsumbudget um x Prozent, so werden die Preise um λx Prozent gesenkt. In dieser Regel wird nun ein Parameter λ genutzt und es ist leicht vorstellbar, dass die Variation von λ einen Einfluss auf die kollektive Entwicklung des Systems ausübt. Beispielsweise könnte ein Wert λ_c existieren, sodass für alle λ größer als λ_c ein Wettbewerb um den niedrigsten Preis ausbricht, der mit Lohndumping und massenhafter Armut einhergeht, wohingegen alle λ kleiner als λ_c eine so träge Anpassung nach sich ziehen, dass das System sich vom temporären Einbruch des Konsumbudgets erholen kann.

Der Übergang zwischen den Zuständen „Lohndumping-Krise“ zu „Robuste Wirtschaft“ kann bezüglich λ abrupt sein, sodass für $\lambda \approx \lambda_c$ minimale Variationen dazu führen, dass zwischen den beiden Zuständen sprunghaft gewechselt wird. Ähnliche Beobachtungen sind in den Naturwissenschaften wohlbekannt: Beispielsweise sorgen kleine Schwankungen der Temperatur

im Bereich der Gefriertemperatur T_0 von Wasser zu Sprüngen zwischen den makroskopisch vollkommen unterschiedlichen Zuständen „Festkörper“ und „Flüssigkeit“. Ein Phasenübergang findet bei T_0 statt und in gleicher Weise ließe sich auch in obigem Beispiel ein Phasenübergang an der Grenze λ_c beobachten. Da Phasenübergänge ein in der Physik weit erforschtes Phänomen darstellen, bietet es sich an, die hierbei entwickelten Analysemethoden auch auf die Beobachtung von agentenbasierten Modellen anzuwenden.

Gegenüber konventionellen mathematischen Modellen haben agentenbasierte Modelle einen wesentlichen Vorteil: Die Handlungsregeln der Agenten sind typischerweise einfacher aufstellbar als eine analytische (Differential-) Gleichung, sodass das Modell leicht ein gewünschtes Verhalten widerspiegeln kann. Insbesondere bei nicht-stetigen Prozessen erweisen sich agentenbasierte Modelle daher als ein sehr einfach zu nutzendes Werkzeug [5].

2.4 Ergebnisse und Erfolge der Econophysik: Stilisierte Fakten

In der Ökonomie gibt es eine Reihe sogenannter „Stilisierten Fakten“ (engl. stylized facts). Dies sind empirisch belegte Beobachtungen, die unabhängig vom Betrachtungszeitpunkt, Beobachtungsort oder ähnlichen Einflüssen auftreten. Ein Beispiel hierfür ist, dass die Nachfrage nach Produkten typischerweise bei steigenden Preisen fällt. Ausnahmen, wie z.B. die Spekulationsblase der Tulpenzwiebeln im siebzehnten Jahrhundert, treten zwar auf, doch Konsumgüter wie Nahrung oder Hygieneartikel folgen dieser Regel ebenso wie Gebrauchsgegenstände ohne Sammlerwert wie beispielsweise Bügeleisen und Staubsauger. Durch die technischen Revolutionen der letzten Jahrzehnte stehen heute zahlreiche Datensätze über Marktentwicklungen, Preisverläufe etc. zur Verfügung, sodass auch nichttriviale Stilisierte Fakten nun bekannt sind. Diese stehen jedoch teilweise im Widerspruch zur Markteffizienzhypothese, die die Grundlage für viele ökonomische Theorien darstellt, sodass neue Erklärungsansätze gesucht werden müssen [10].

Modelle mit dem Ziel zu entwickeln, unerwartete Beobachtungen quantitativ erklären zu können, gehört spätestens seit dem Siegeszug der Quantenmechanik zu den wichtigsten Fähigkeiten der Physiker. Als Beispiel seien hier nur das Debye-Modell zur Erklärung der spezifischen Wärme von

Festkörpern oder das Bethe-Weizsäcker-Tröpfchenmodell zur Erklärung der Bindungsenergien von Kernen genannt (Vgl. [11] bzw. [12]). Es ist kaum verwunderlich, dass die Econophysik daher die Erforschung der Stilisierten Fakten als einen ihrer Arbeitsschwerpunkte identifiziert hat [10]. Im Folgenden werden einige der Stilisierten Fakten aufgelistet und die econophysikalischen Modelle erläutert, mit denen es gelungen ist, diese empirischen Befunde zumindest teilweise zu reproduzieren.

2.4.1 Potenzgesetze

Verschiedene empirische Analysen zeigen, dass die Verteilung der Rendite r an allen beobachteten Handelsplätzen für sehr hohe Werte einer Potenzverteilung $\rho(r) \propto r^{-1-a}$ folgt, was darauf hindeutet, dass hinter den Daten ein komplexes System stehen muss¹. Ähnliches wurde in verschiedenen anderen Systemen in der Natur beobachtet und durch das sogenannte „Sandpile“-Modell beschrieben, das eine Analogie zwischen diesen komplexen Systemen und Sandhügeln zieht: Wird weiterer Sand dem Hügel hinzugefügt, wird ein kritischer Punkt erreicht, bei dem der zugefügte Sand eine Lawine in Gang setzt, nach der alle Bereiche des Hügels wieder in einem Gleichgewichtszustand sind, wobei die Größe der Lawinen einer Potenzgesetz-Verteilung folgen [17].

Auf die Ökonomie übertragen wurde folgendes Modell entwickelt: Es wird eine Verarbeitungskette zwischen den einzelnen Firmen eines Wirtschaftsraumes betrachtet, die eine Übersicht darüber darstellt, welche Firma Zulieferer von welchen anderen Firmen ist. An den Enden dieser Kette stehen die Rohstoffproduzenten, die keine weiteren Zulieferer haben, und diejenigen Firmen, die Konsumgüter verkaufen. Es wird nun davon ausgegangen, dass eine Firma nicht instantan einen eingetroffenen Auftrag an ihre Zulieferer weiterleitet, sondern z.B. wegen des Verwaltungsaufwandes darauf wartet, bis eine bestimmte Anzahl an Aufträgen eingegangen ist. Mit dieser simplen Nichtlinearität gelingt es, ein Modell zu erstellen, dessen exakte Lösung in einer Potenzverteilung der Profite der Firmen von der Form

$$P(x) \propto x^{-1-\alpha} \tag{1}$$

¹Vgl. dazu [10], Kapitel 1. Analog dazu sind z.B. die kritischen Exponenten von komplexen Systemen nahe eines Phasenübergangs ein Zeichen für die Nichtlinearität des Systems.

für große Werte der Profite x mündet (Vgl. [10], Kapitel 3). Zwar stimmt der Wert des Exponenten α nicht mit den empirischen Daten überein, doch ist dies zumindest eine qualitative Erklärung des Potenzgesetzes in der Verteilung der Renditen und Profite.

2.4.2 Volatilitäts-Clustering

Ein weiterer stilisierter Fakt betrifft die Volatilität, das Maß für die Schwankungen der Kurswerte von Finanzprodukten. Empirische Beobachtungen (Vgl. [18]) zeigen, dass auf große Änderungen der Kurswerte häufig weitere große Änderungen folgen, auf kleine Änderungen häufig kleine Änderungen, wobei das Vorzeichen dieser Änderung irrelevant ist. Dieses Phänomen wird als Clustering der Volatilität bezeichnet und lässt sich alternativ als die positive Korrelation zwischen den Absolutbeträgen der Volatilität bezeichnen ([10], Kapitel 1). Die Verteilungsfunktionen der Volatilitäten bzw. ihre Korrelation werden mit den klassischen ökonomischen Ansätzen nur mit mäßigem Erfolg erklärt [13]. Mit der Hilfe von agentenbasierten Modellen können jedoch einige wesentliche Charakteristiken der Volatilität reproduziert werden.

Das Modell von Youssefmir, Huberman und Hogg [19] betrachtet die einzelnen Händler am Finanzmarkt als Agenten, die zwischen einer Auswahl vorgegebener Strategien entscheiden, wie sie ihr Geld anlegen werden. Je höher der finanzielle Erfolg einer Strategie in der Vergangenheit war, umso wahrscheinlicher wird sie von den Händlern gewählt. Genaue Untersuchungen dieses Modells zeigen, dass hier Volatilitäts-Clustering auftritt, wenn viele Agenten zwischen verschiedenen, aber gleichermaßen erfolgreichen Strategien wechseln. In einem ähnlichen Modell von Brock und Hommes [20] gelingt die Verknüpfung zwischen diesen ökonomischen Modellen und der nichtlinearen Physik, da hier die Dynamik des Systems dargestellt über sein Bifurkationsdiagramm als typisches Beispiel eines deterministischen Chaos interpretiert wird. Eine weitere Zusammenstellung von Untersuchungen des Volatilitäts-Clustering durch agentenbasierte Modelle findet sich in [16].

2.4.3 Krisen und Blasen

Ein in der Realität weithin bekannter stilisierter Fakt ist das Auftreten von Spekulationsblasen, die in einer Krise der Wirtschaft enden. Steigende Arbeitslosigkeit, sinkende Produktivität, hohe Verschuldungsquoten etc. sind unmittelbare Folgen, die in den Krisen der vergangenen Jahrzehnten auch Nicht-Ökonomen problemlos identifizieren konnten. In den etablierten ökonomischen Modellen, die davon ausgehen, dass die Wirtschaft sich nach der Markteffizienzhypothese ständig im Gleichgewicht befindet, oder sich auf die statistische Analyse Daten aus der Vergangenheit konzentriert, bleibt eine Erklärung für diese Beobachtung offen: Die ihnen zugrunde liegende Anschauung schließt das Auftreten von Wirtschaftskrisen kategorisch aus, da diese im Widerspruch zum ständigen Marktgleichgewicht stehen. Zudem ist es in den Gleichgewichtsmodellen nur schwer möglich, die komplexe Struktur von realen Wirtschaftsräumen und die dort stattfindenden Interaktionen zwischen Banken, Industrie, Konsumenten, Hedge Funds etc. zu beschreiben. Agentenbasierte Modelle haben hierbei den großen Vorteil, diese komplizierten Interaktionen nachbilden zu können, sodass es mit ihnen gelingt, das Auftreten von Wirtschaftskrisen auch ohne exogene Schocks zu erklären [21]. Eines dieser Modelle ist das in dieser Arbeit behandelte Mark 0.

2.4.4 Fazit: Econophysik und Agentenbasierte Modelle

Den agentenbasierten Modellen der Econophysik ist es gelungen, einigen offenen Fragen der Ökonomie zumindest einen Teil ihrer Mystik zu nehmen. Mit ihnen werden in den klassischen Modellen unerklärliche empirische Beobachtungen erfolgreich reproduziert, sodass sie auch außerhalb der wissenschaftlichen Fachjournale inzwischen Aufmerksamkeit genießen (vgl. z.B. [22]). Wie auch in [21] geschildert, wird jedoch davor gewarnt, die Modelle der Ökonophysik als exakte Darstellungen der Realität anzusehen und aus ihnen Vorhersagen ähnlich eines Wetterberichts herzuleiten. Gleichwohl bietet die Ökonophysik einen für die Wirtschaftswissenschaften neuartigen Ansatz zur Erklärung der stilisierten Fakten.

2.5 Das Modell Mark 0

Mark 0 ist ein agentenbasiertes Modell, dessen Agenten einzelne Firmen sind. Die Konsumenten werden hierbei nicht als individuelle Agenten repräsentiert, sondern stattdessen durch aggregierte Größen wie die Gesamtersparnisse dargestellt. Alternativ dazu können im Modell „Mark I“ auch die Konsumenten als einzelne Agenten dargestellt werden, aber es zeigt sich in [1], dass bei der Vereinfachung zu Mark 0 wesentliche Beobachtungen erhalten bleiben, das Modell aber einfacher aufzubauen ist. Im Sinne von Ockhams Rasiermesser empfiehlt sich daher die Analyse von Mark 0. Der python-Code von Mark 0 ist im Anhang unter Abschnitt 8.3 enthalten.

2.5.1 Der Modellaufbau

In Mark 0 werden N_F Firmen individuell und μN_F Konsumenten als Gesamtheit betrachtet, wobei $\mu \geq 1$ gilt. Die Firmen werden als $i = 1$ bis N_F numeriert. Die Produktionsmenge Y_i , die gezahlten Löhne W_i , die Verkaufspreise p_i und die Nachfrage nach der produzierten Ware D_i sind die Variablen, die die einzelne Firma kennzeichnen.

Es wird davon ausgegangen, dass die Produktionsmenge Y_i proportional zur Anzahl der Arbeitskräfte ist, sodass o. B. d. A. die Zahl an Arbeitnehmern der Firma i gleich Y_i ist. Daraus ergibt sich als Arbeitslosenquote u des Gesamtsystems (z.T. auch synonym als „Arbeitslosigkeit“ bezeichnet)

$$u = 1 - \frac{1}{\mu N_F} \sum_{i=1}^{N_F} Y_i \quad (2)$$

und für die Beschäftigungsquote $E = 1 - u$. Die Konsumfähigkeit wird durch die Gesamtersparnisse S der Haushalte sowie durch die gesamten Lohneinkünfte aus dem vergangenen Zeitschritt $\sum_{i=1} W_i Y_i$ bestimmt. Es erscheint sinnvoll, dass nicht die gesamte Summe aus Ersparnissen und Lohneinkünften zum Konsum zur Verfügung steht, sondern lediglich ein Anteil c . Für das Konsumbudget C_B gilt also

$$C_B = c \left(S + \sum_{i=1} W_i Y_i \right), \quad (3)$$

wobei für die Behandlung von Ersparnissen und Lohneinkünften unterschiedliche $c_S \neq c_W$ gewählt werden können, worauf in Mark 0 aber verzichtet wird.

Ein nach der Produktionszahl gemittelter Preis \bar{p} wird über die Gleichung

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1} Y_i p_i}{\sum_{i=1} Y_i} \quad (4)$$

als Referenzwert für andere Preise berechnet. Mithilfe dieses Referenzwertes lässt sich nun auf Basis des Konsumbudgets die Nachfrage D_i nach dem Produkt der Firma i bestimmen. Hierzu wird ein Parameter β eingeführt, der die Preissensitivität der Konsumenten reguliert. $\beta = 0$ bedeutet eine vollständige Vernachlässigung der Preisunterschiede, $\beta \rightarrow \infty$ würde alle Konsumenten ausschließlich zum Kauf des günstigsten Produktes bewegen. Die Nachfrage wird im Modell durch die Gleichung

$$D_i = \frac{C_B}{p_i} \frac{\exp(-\beta p_i / \bar{p})}{\sum_{i=1} \exp(-\beta p_i / \bar{p})} \quad (5)$$

reguliert, sodass die Normierung $C_B = \sum_{i=1} p_i D_i$ erfüllt wird.

Mit den bisher beschriebenen Größen werden die Agenten und die Umgebung vollständig beschrieben. Der folgende Abschnitt befasst sich nun mit der Interaktion zwischen Agenten und System, also mit den Verhaltensregeln der Agenten.

2.5.2 Verhaltensregeln der Firmen

Wesentlich für die Verhaltensregeln der Firmen ist der Vergleich zwischen Angebot Y_i und Nachfrage D_i . Ist $D_i > Y_i$, wird die Produktion erhöht; für $D_i < Y_i$ wird sie verringert. Auch die Preise p_i werden im diesem Prozess angepasst. Falls $D_i > Y_i$ gilt und der Preis unter dem Referenzpreis $p_i < \bar{p}$ liegt, so wird neben der Produktion auch der Preis erhöht. Falls $D_i < Y_i$ ist und für den Preis $p_i > \bar{p}$ gilt, wird auch der Preis verringert. Diese Regeln werden im Modell ebenfalls durch Gleichungen ausgedrückt, die allerdings noch die Einführung einiger Hilfsgrößen erfordern. Zudem sind die Anpassungen von Preisen und Produktionsmengen nicht rein deterministisch, sondern erfolgen mittels Zufallsvariablen.

Zunächst wird festgestellt, dass die Erhöhung der Produktionsmenge um

ΔY_i nur möglich ist, wenn der Firma eine entsprechende Menge an potentiellen neuen Arbeitskräften \tilde{u}_i zur Verfügung steht. Ebenso können weder Produktion noch Preis ins Negative sinken. Ähnlich wie die Nachfrage D_i unter Berücksichtigung eines Referenzpreises \bar{p} bestimmt wird, wird \tilde{u}_i über einen Referenzlohn \bar{W} mit

$$\bar{w} = \frac{\sum_{i=1} W_i Y_i}{\sum_{i=1} Y_i} \quad (6)$$

ermittelt. In Mark 0 wird dazu die Gleichung

$$\mu \tilde{u}_i = \frac{\exp(\beta W_i / \bar{w})}{\sum_{i=1} \exp(\beta W_i / \bar{w})} \mu N_F u \quad (7)$$

verwendet, die die Normierung $\sum_{i=1} \tilde{u}_i = N_F u$ sicherstellt. Da die Bereitschaft der Firmen, bestehende Angestellte zu entlassen anders sein kann als die Bereitschaft, neue Angestellte einzustellen, werden die Parameter η_+ und η_- eingeführt, wobei ersterer sich auf die Bereitschaft für Neueinstellungen, letzterer auf die für Entlassungen bezieht. Die Bereitschaft zur Preisänderung wird mit γ_p bezeichnet. Eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable wird im folgenden als ξ_i bezeichnet. Mit diesen Definitionen lassen sich nun die Aktualisierungsregeln der Variablen vom Zeitpunkt t zum nächstgelegenen Zeitpunkt $t + 1$ ausformulieren:

$$Y_i(t) < D_i(t) \Rightarrow \begin{cases} Y_i(t+1) = Y_i(t) + \min\{\eta_+(D_i(t) - Y_i(t)), \mu \tilde{u}_i(t)\} \\ p_i(t) < \bar{p}(t) \Rightarrow p_i(t+1) = p_i(t)(1 + \gamma_p \xi_i(t)) \\ p_i(t) > \bar{p}(t) \Rightarrow p_i(t+1) = p_i(t) \end{cases} \quad (8)$$

$$Y_i(t) > D_i(t) \Rightarrow \begin{cases} Y_i(t+1) = \max\{Y_i(t) - \eta_-(Y_i(t) - D_i(t)), 0\} \\ p_i(t) > \bar{p}(t) \Rightarrow p_i(t+1) = p_i(t)(1 - \gamma_p \xi_i(t)) \\ p_i(t) < \bar{p}(t) \Rightarrow p_i(t+1) = p_i(t) \end{cases}$$

2.5.3 Buchführung der Firmen

Für jede der Firmen wird der Profit \mathcal{P}_i aus den im letzten Zeitschritt erzielten Einnahmen $p_i \min(D_i, Y_i)$ und den gezahlten Lohnkosten $W_i Y_i$ be-

rechnet:

$$\mathcal{P}_i = p_i \min(D_i, Y_i) - W_i Y_i . \quad (9)$$

Wenn der Profit $\mathcal{P}_i > 0$ ist, zahlt in Mark 0 die Firma eine Dividende $\delta\mathcal{P}_i$ an die Gesamtheit der Haushalte aus, deren Ersparnisse S sich somit erhöhen. Die Rücklagen ε_i der Firmen werden nach jedem Zeitschritt um \mathcal{P}_i und um die Dividendenzahlung verändert. Es ergeben sich somit Regeln für die Buchführung:

$$\mathcal{P}_i(t) = p_i(t) \min\{Y_i(t), D_i(t)\} - W_i(t)Y_i(t) \quad (10)$$

$$\varepsilon_i(t+1) = \varepsilon_i(t) + \mathcal{P}_i(t) - \delta\mathcal{P}_i(t)H(\mathcal{P}_i(t))$$

$$S(t+1) = S(t) - \sum_{i=1} \mathcal{P}_i(t) + \delta \sum_{i=1} \mathcal{P}_i(t)H(\mathcal{P}_i(t)) . \quad (11)$$

Hierbei ist $H(x)$ die Heaviside-Funktion mit $H(x) = 1$ für $x > 0$ und $H(x) = 0$ sonst.

Mit diesen Regeln ist es natürlich möglich, dass die Rücklagen ε_i einer Firma negativ werden, was Finanzierungsschwierigkeiten entspricht. Es wird daher eine finanzielle Stabilität definiert, anhand derer eine Bank entscheidet, ob den Firmen mit negativen Rücklagen ein negativer Kontostand weiterhin zugestanden wird. Wenn die Firma allerdings in zu großer finanzieller Schieflage ist, so verweigert die Bank einen weiteren Kredit und die Firma kann bankrott gehen. Die finanzielle Stabilität wird als

$$\Phi_i = -\varepsilon_i/(W_i Y_i) \quad (12)$$

definiert und ein Schwellwert Θ wird eingeführt. Für $\Phi_i < \Theta$ darf die Firma auch bei negativem Kontostand weiterhin ihren Geschäften nachgehen. Ist $\Phi_i(t) > \Theta$, steht die betroffene Firma vor dem Bankrott. Mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - f$ schreitet eine finanziell gesunde Firma j ein, um die Firma i zu retten. Sie begleicht die Schulden von i , sodass

$$\varepsilon_j(t+1) = \varepsilon_i(t) + \varepsilon_j(t) \text{ und } \varepsilon_i(t+1) = 0 \quad (13)$$

gelten. Ebenso gleichen sich Preise und Löhne der aufgekauften Firma denen des Käufers an: $p_i = p_j$ und $W_i = W_j$. Mit der Wahrscheinlichkeit f oder bei einem Mangel an potentiellen Käufern wird die schwächelnde Firma nicht

aufgekauft, sondern wird zahlungsunfähig. Die Produktion bzw. Anzahl an Arbeitskräften Y_i wird zu 0 und die Schulden ε_i werden an die Ersparnisse der Haushalte $S(t+1) = S(t) + \varepsilon_i(t)$ übergeben.

Eine insolvente Firma kann durch öffentliche Mittel wieder zahlungsfähig gemacht werden, indem hierzu die Schulden von den Ersparnissen S der Konsumenten beglichen werden. Für jede insolvente Firma liegt die Wahrscheinlichkeit pro Zeitschritt, dass von dieser Option Gebrauch gemacht wird, bei φ . In diesem Fall wird ihr Güterpreis zum Referenzpreis $p_i(t) = \bar{p}(t)$. Eine zufällige Zahl von Arbeitnehmern $Y_i(t)$ wird eingestellt, die nach einer Gleichverteilung zwischen 0 und der maximal möglichen Arbeitnehmerschaft μ_i ausgewählt wird. Der zuletzt gezahlte Lohn wird als $W_i(t)$ beibehalten und als Rücklagen erhält die Firma $\varepsilon_i(t) = W_i(t)Y_i(t)$ exakt genug, um die unmittelbaren Lohnkosten des nächsten Zeitschritts begleichen zu können. Da diese Liquidität von den Haushalten bzw. deren Ersparnissen bereitgestellt werden, kann S somit negativ werden. Tritt dieser Fall ein, werden die Schulden der Haushalte auf alle Firmen mit positiver Liquidität proportional zu deren Werten für ε_i verteilt, sodass $S(t) \geq 0$ bleibt: Die Firmen mit positiver Liquidität deponieren ihr Geld bei der Bank, die die insolventen Firmen mit dem Geld der Privatanleger reaktiviert. Falls dieses Geld nicht ausreicht, werden die Reserven der Firmen genutzt.

Die einfachste Version des Modells Mark 0 besteht aus den hier erklärten Regeln. Es ist zu betonen, dass in dieser einfachsten Version die Löhne W_i nicht geändert werden. Auch unter dieser Einschränkung ist es möglich, verschiedene Phasen zu identifizieren, eine Erweiterung des Modells um eine Lohnänderung im Stil von der Preisänderung in Gleichung (8) erscheint dennoch naheliegend. Details zum Modellaufbau und den Erweiterungen lassen sich z.B. in [1] nachlesen.

2.6 Bifurkation und Stochastische Kontinuierung

Zunächst wird hier beispielhaft die Bifurkation eines nichtlinearen Systems erläutert und ein Bifurkationsdiagramm erstellt. Daraufhin wird auf die Methode der Stochastischen Kontinuierung eingegangen, mit der sich das Bifurkationsdiagramm von Systemen erstellen lässt, die nicht durch eine deterministische Differentialgleichung beschrieben werden wie z.B. agenten-

basierte Modelle.

2.6.1 Bifurkation

In einem nichtlinearen System, das von einer Observablen x beschrieben wird, existieren sogenannte Fixpunkte, in denen die Ableitung von x nach der Zeit $\dot{x} = 0$ ist. Ist das System einmal in diesem Zustand, so verlässt es diesen ohne externe Einflüsse nicht mehr. Wenn eine Funktion $F(x)$ gegeben ist, für die die Differentialgleichung $\dot{x} = F(x)$ gilt, ist die Suche nach Fixpunkten des Systems äquivalent zur Nullstellenbestimmung von $F(x)$, was über Werkzeuge wie z.B. das Newton-Raphson-Verfahren gelingen kann. Ist das System von einem Parameter α abhängig und demnach $F = F(x, \alpha)$, so kann in einem **Bifurkationsdiagramm** die Position der Fixpunkte x_0 abhängig von dem Parameter α dargestellt werden. Hierbei wird zwischen stabilen und instabilen Fixpunkten unterschieden: Stabile Fixpunkte kehren bei kleinen Störungen in ihre Ursprungsposition zurück, instabile Fixpunkte nicht.

An einem Beispiel werden diese Konzepte an einem System mit der Gleichung $\dot{x} = F(x, \alpha) = x^3 - \alpha x$ verdeutlicht. Die Nullstellen von $F(x, \alpha)$ sind $x_1 = 0$ und für $\alpha > 0$ auch $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}$. Betrachtet man den Graphen $(x/F(x, \alpha))$ in Abbildung 1(a), also (x/\dot{x}) , so lässt sich die Stabilität der Fixpunkte analysieren:

Wird das System am Punkt $(x_1/0)$ aus seiner Ruhelage nach links verschoben (also x verringert), so wird $F(x, \alpha)$ positiv, sodass auch \dot{x} positiv wird und x wieder nach rechts verschiebt. Andersherum gilt auch, dass eine Verschiebung aus $(x_1/0)$ nach rechts in einen rüctreibenden Effekt nach links resultiert: x_1 ist somit ein stabiler Fixpunkt. Für x_2 und x_3 gilt dies nicht, da dort jeweils eine Verschiebung nach links ein $F(x, \alpha) < 0$ zur Folge hat, sodass die Verschiebung nach links fortgesetzt wird. Gleiches gilt für eine Verschiebung nach rechts mit dann positivem $F(x, \alpha) > 0$. Diese Fixpunkte sind also instabil.

Es ist allerdings auch ersichtlich, dass diese Überlegungen nur für ein $\alpha > 0$ gelten. Bei $\alpha = 0$ fallen $x_{1,2,3}$ zusammen und werden alle 0, bei $\alpha < 0$ existiert nur noch $x'_1 = 0$ als Fixpunkt, wie in Abbildung 1(a) (rechts) dar-

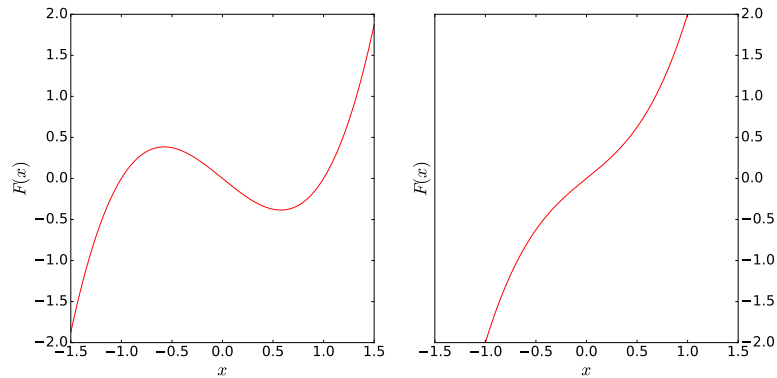
gestellt, welcher ein instabiler Fixpunkt ist.

Basierend auf diesen Überlegungen wird ein Bifurkationsdiagramm erstellt, das die Position aller Fixpunkte $(x_i)_i$ in Abhängigkeit von dem Parameter α darstellt. Dies ist in Abbildung 1(b) zu sehen, wobei hier zwischen instabilen und stabilen Fixpunkten mit gestrichelten bzw. durchgezogenen Linien unterschieden wird.

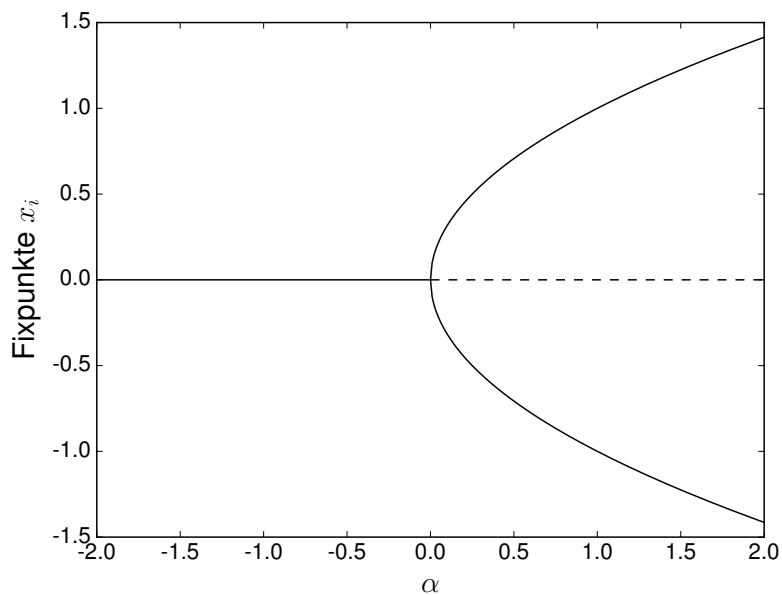
Die Erstellung eines Bifurkationsdiagrammes ist sehr hilfreich für die Beschreibung eines komplexen, dynamischen Systems, da somit die stabilen und instabilen Fixpunkte des Systems beschrieben werden. Für eine gegebene Differentialgleichung $\dot{x} = F(x, \alpha)$ wie im obigen Beispiel gelingt dies, indem $F(x, \alpha) = 0$ z.B. mit Variationen des Newton-Raphson-Nullstellenverfahrens gelöst wird. Für Systeme ohne eine gegebene Differentialgleichung $\dot{x} = F(x, \alpha)$, wie es typischerweise in agentenbasierten Systemen der Fall ist, muss ein anderes Verfahren gewählt werden, um das Bifurkationsverhalten zu analysieren. Im System implementierte stochastische Schwankungen erschweren diese Aufgabe umso mehr. Ein möglicher Ausweg aus diesem Problem ist die **Stochastische Kontinuierung**, eine Weiterentwicklung der Numerischen Kontinuierung.

2.6.2 Numerische Kontinuierung

Die Numerische Kontinuierung bezeichnet eine numerische Analysemethode von komplexen Systemen, bei denen die Funktion $F(x, \alpha)$ aus der Differentialgleichung $\dot{x} = F(x, \alpha)$ bekannt ist. Für ein System in Abhängigkeit von einem Parameter α mit einer makroskopischen Kontrollgröße X wird zunächst für zwei Startparameter $\alpha_{1,2}$ durch z.B. ausreichend lange Relaxationszeiten jeweils ein stabiler Zustand mit der Observablen bzw. Kontrollgröße $X_{1,2}$ erstellt. Die ersten beiden stabilen Fixpunkte (α_i/X_i) im Phasendiagramm werden also ermittelt. Mit diesen Punkten wird eine gerade Strecke \vec{S} extrapoliert, an deren Ende die hierzu orthogonale Strecke \vec{S}' betrachtet wird (vgl. Abbildung 2). Entlang \vec{S}' kann nun der nächste Fixpunkt durch einen Nullstellenalgorithmus wie Newton-Raphson angewandt auf $F(x, \alpha)$ gefunden werden. Die Richtung, in der ein neuer Fixpunkt durch die Nullstellenberechnung gesucht wird, wird hierbei bezüglich der Sekante der letzten beiden Fixpunkte gewählt, der Abstand zwischen zwei Fixpunk-



(a) Darstellung der Funktion $F(x) = x^3 - \alpha x = \dot{x}$ für $\alpha = 1$ (links) und $\alpha = -1$ (rechts).



(b) Position der Fixpunkte x_i abhängig vom Parameter α . Stabile Fixpunkte sind als durchgehende Linien, instabile gestrichelt eingezeichnet.

Abbildung 1: Bifurkationsanalyse für die Funktion $\dot{x} = F(x, \alpha) = x^3 - \alpha x$.

ten über die Pseudo-Arclength-Methode. Somit ist es auch möglich, Kurven wie z.B. den Scheitelpunkt der nach rechts geöffneten Parabel in Abbildung 1(b) abzutasten. Anders als die simple Relaxation des Systems über einen ausreichend langen Zeitraum, durch den sich ebenso die stabilen Fixpunkte ermitteln lassen, kann durch die Numerische Kontinuierung auch ein Ast

von instabilen Fixpunkten gefunden werden, da diese auch Nullstellen der Funktion $F(x, \alpha)$ darstellen.

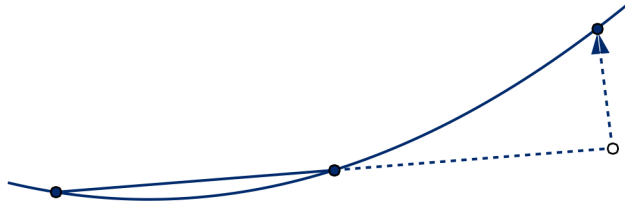


Abbildung 2: Beispiel zur Extrapolation von einem weiteren Fixpunkt basierend auf der Strecke \vec{S} zwischen zwei Fixpunkten und deren Orthogonalen \vec{S}' , entnommen aus [7].

2.6.3 Stochastische Kontinuierung

In komplexen Modellen mit einer nicht-deterministischen Dynamik oder Agentensystemen ist keine Funktion $F(x, \alpha)$ bekannt, die die Differentialgleichung $\dot{x} = F(x, \alpha)$ erfüllt. Es muss also ein Umweg gefunden werden, der in der Praxis aus drei Prozessen besteht: Dem Lifting, Evolving und Restricting.

Im Lifting werden verschiedene Punkte auf der Strecke \vec{S}' initialisiert und erfahren eine kurze Zeitentwicklung, aus deren Trends abgelesen werden können, wo entlang von \vec{S}' sich der nächste Fixpunkt (α_3/X_3) des Systems befindet. Es wird ein Makrozustand X' vorgegeben, auf Basis dessen die mikroskopischen Strukturen $\{x'_i\}$ des Systems (z.B. Agenten) erstellt werden. Da in den hier betrachteten Systemen keine Funktion $F(x, \alpha)$ die Systemdynamik beschreibt, muss über das Lifting also ein Umweg gegangen werden, wie es auch in Abbildung 3 dargestellt ist.

Eine große Schwierigkeit der Stochastischen Kontinuierung besteht darin, im Lifting entlang von \vec{S}' verschiedene Systeme (α'/X') zu erstellen, die auf \vec{S}' liegen. Es muss über die Mikrozustände $\{x'_i\}$ ein System erstellt werden, das der Observablen bzw. dem Makrozustand X' entspricht, aber gleichzeitig in seiner inneren Struktur auch wie ein natürlich gewachsenes System erscheint, sodass dieser Prozess wie in [8] als „Structure Lifting“ bezeichnet

wird. Möchte man z.B. in einem econophysikalischen System, das N Firmen als Agenten/Mikrozustände nutzt, eine Arbeitslosenquote als Makrozustand $X = 0.1$ erstellen, könnte man einerseits alle Firmen mit nur 90 Prozent ihrer maximal möglichen Zahl an Arbeitnehmern ausstatten. Ebenso ist es denkbar, nur 90 Prozent der Firmen überhaupt mit Arbeitnehmern auszustatten, diese dafür aber auch vollständig auszulasten. Beide Systeme würden zu einer Arbeitslosenquote von 0.1 führen, doch welches hiervon die sinnvollere Wahl ist, ist ohne Kenntnis über die Systemdynamik nicht entscheidbar.

Das Evolving stellt die möglichst kurze Zeitentwicklung τ dar, die die Mikrozustände erfahren. Die Wahl von τ ist in der Praxis so gering, dass die Rechenzeit klein gehalten ist, andererseits aber groß genug, damit die stochastischen Schwankungen im System sich ausgleichen.

Im Restricting wird aus den nun entwickelten Mikrozuständen x_i'' der neue Makrozustand X'' gewonnen. Die Veränderung zwischen X' und X'' lassen nun mittels Interpolationsverfahren auf den neuen Fixpunkt (α''/X'') schließen. Der Gesamtprozess Lifting-Evolving-Restricting ist in Abbildung 3 dargestellt.

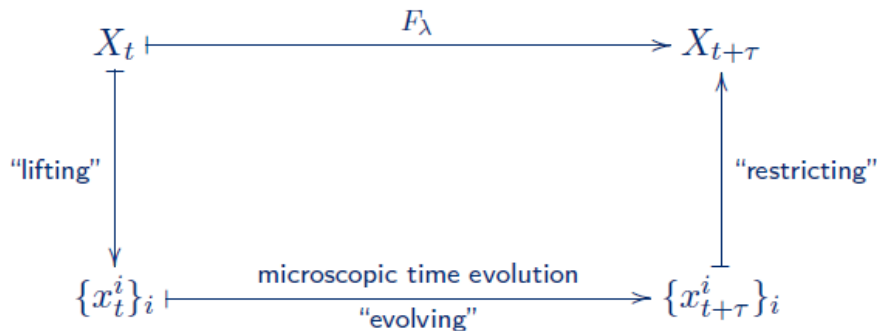


Abbildung 3: Äquivalenz zwischen $F(x)$ und dem Prozess des Lifting, Evolving und Restricting, entnommen aus [7]. Die hier verwendete Notation weicht von derjenigen aus der vorliegenden Arbeit ab.

Die Stochastische Kontinuierung wurde bereits erfolgreich z.B. am Ising-Modell erprobt. Abbildung 4 zeigt das über die Stochastische Kontinuierung erzeugte Bifurkationsdiagramm des Ising-Modells verglichen mit Onsagers exakter Lösung und die hohe Übereinstimmung zwischen den beiden Gra-

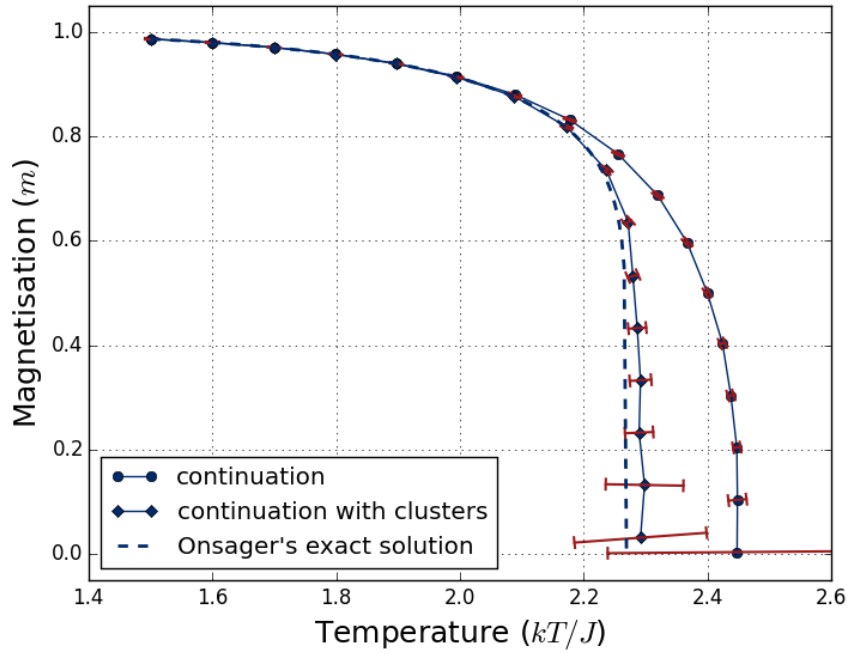


Abbildung 4: Erfolgreiche Anwendung der Stochastischen Kontinuierung im Ising-Modell mit Fehlerbalken in rot, entnommen aus [7].

phen. Eine genauere Beschreibung der Numerischen Kontinuierung findet sich in [23], die Verfahrensweise der Stochastischen Kontinuierung wird in [7] näher erklärt.

3 Untersuchung von Mark 0: Phasendiagramme

Ohne Spekulation gibt es keine neue Beobachtung.

- Charles Darwin

Das erste Ziel nach der Implementierung von Mark 0 ist die Überprüfung, ob das Modell erfolgreich umgesetzt wurde. Dazu wird versucht, einige der Phasendiagramme aus [1] mit den Daten aus dem Modell nachzubilden. Zunächst konzentriert sich daher die Analyse auf Simulationen für $\Theta = \infty$ und verschiedenen Werten für η_+ und η_- , da schon in diesem zusätzlich vereinfachtem Modell, das nun Insolvenzen von Firmen ausschließt, ein Phasenübergang in [1] zu beobachten ist, der ausschließlich vom Verhältnis $R := \eta_+/\eta_-$ bestimmt wird. Danach wird die Rolle von Θ genauer betrachtet und versucht, die Beobachtung von [1] zu reproduzieren, dass sich vier Phasenzustände abhängig von R und Θ ausbilden. Bei den hier diskutierten Datensätzen werden meist weniger Firmen N_F betrachtet, als in [1], um den Rechenaufwand zu reduzieren. Dennoch gelingen einige qualitativ ähnliche Beobachtungen, die sich lediglich in den Werten der genutzten Parameter von denen in [1] unterscheiden.

3.1 Analyse von R: Ungleichgewicht zwischen Einstellungen und Entlassungen

Zunächst werden numerische Simulationen von Mark 0 durchgeführt, in denen η_+ und η_- variiert werden. Um den Einfluss der anderen Parameter hierbei zu vernachlässigen, werden diese konstant auf den Werten $\gamma_p = 0.1$, $\beta = 2$, $\Theta = \infty$, $c = 0.5$, $\delta = 0.02$ gehalten. Als Firmenanzahl wird $N_F = 200$ gesetzt.

Ausgewertet wird nach jeder Situation die Entwicklung der Arbeitslosigkeit im Verlauf der einzelnen Zeitschritte. Hierbei lassen sich zwei stark unterschiedliche Kurven $u(t)$ feststellen, die in vielen Simulationsdurchgängen qualitativ ähnlich auftreten und die auch in [1] beobachtet werden. Die eine Phase, als „Full Unemployment“ (FU) bezeichnet, wird dadurch gekennzeichnet, dass $u(t)$ auf einen Wert von nahezu 1 ansteigt und nicht mehr auf tiefere Werte fällt. Die andere Phase, „Full Employment“ (FE), zeichnet sich durch das entgegengesetzte Verhalten auf, dass $u(t)$ auf einen

Wert nahe 0 fällt und abzüglich eines Rauschens dort auch verbleibt. Exemplarische Verläufe von $u(t)$ für die beiden Phasen sind in Abbildung 5 zu finden.

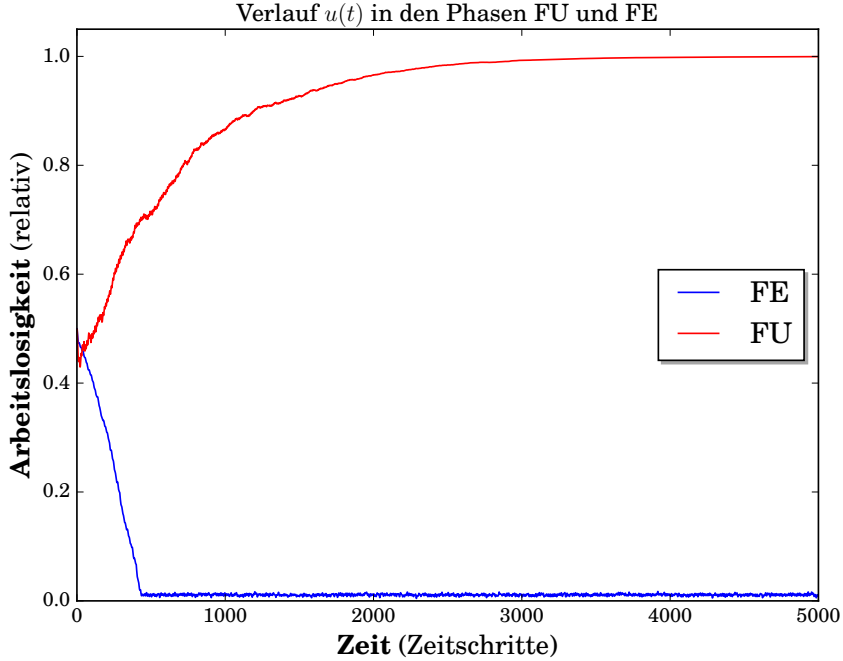


Abbildung 5: Beispielhafter Verlauf von $u(t)$ in der Phase FU (rot) für $\eta_+ = 0.1$ und $\eta_- = 0.1$ sowie in der Phase FE (blau) für $\eta_+ = 0.4$ und $\eta_- = 0.6$, jeweils für $N_F = 100$, $\Theta = \infty$, $\delta = 0.02$, $c = 0.5$, $\beta = 2$, $\gamma_p = 0.1$.

Der Phasenraum (η_+/η_-) wird zunächst mit einer Schrittweite von 0.1 entlang beider Koordinaten gerastert, um die Regionen zu identifizieren, in denen ein Übergang zwischen den beiden Phasen vorliegt. Diese Bereiche werden erneut mit einem variierenden η_+ für ein festes η_- mit einer Schrittweite von 0.01 gerastert, um den Phasenübergang im kritischen Punkt η_{+c}/η_{-c} genauer zu lokalisieren. Als Unsicherheit dieser Übergangspunkte wird in η_{+c} eine Gleichverteilung mit Gesamtbreite 0.01 angenommen, so dass

$$u(\eta_{+c}) = \sqrt{0.01^2/12} \approx 0.003 \quad (14)$$

als Unsicherheit gilt. Mit den so erhaltenen kritischen Wertepaaren und ihren Unsicherheiten lässt sich eine Gerade $\eta_{+c} = a\eta_{-c} + b$ interpolieren, die

durch den kritischen Bereich führt und somit die Phasen FU und FE voneinander trennt. Die Wertepaare und die über lineare Regression ermittelte Ausgleichsgerade sind in Abbildung 6 dargestellt. Der η_+ -Achsenabschnitt ist mit -0.018 ± 0.003 klein gegenüber den Größen von η_{+c} und η_{-c} , die Achsensteigung wird als $a = 0.757 \pm 0.007$ bestimmt.

Diese Beobachtungen sind im Einklang mit den numerischen Simulationen, die in [1] beschrieben sind (vgl. die dortige Abbildung 3 auf Seite 13). Dort werden die beiden Phasen FU und FE ebenso durch eine Gerade voneinander getrennt. Für den Wert $\gamma_p = 0.1$, der auch in den hier analysierten Simulationen genutzt wurde, ergibt sich durch Betrachtung des Diagramms in [1] eine Steigung von etwa $a' = 0.7$. Dies ist etwas niedriger als der hier interpolierte Wert für a , allerdings werden in [1] auch $N_F = 1000$ bzw. $N_F = 10000$ Firmen genutzt. Obwohl zur Verringerung des Rechenaufwandes hier $N_F = 200$ gewählt wird, lassen sich also die wesentlichen Charakteristiken des Modells reproduzieren. Zu bemerken ist zudem, dass trotz der Unterschiede zwischen a und a' beide Werte kleiner als 1 sind, sodass für eine FE-Phase der gesunden Wirtschaft in beiden Fällen $\eta_+ < \eta_-$ sein kann.

Als Fazit dieser Beobachtungen lässt sich festhalten: Für $\Theta = \infty$ werden die Beobachtungen aus [1] bestätigt. Zwei Phasen, gekennzeichnet durch Vollbeschäftigung bzw. vollständige Arbeitslosigkeit, lassen sich beobachten, die im Phasenraum (η_+/η_-) durch eine Gerade voneinander getrennt sind. Trotz der geringen Firmenzahl $N_F = 200$ werden die Beobachtungen aus [1] reproduziert. Da die Phasengrenze nur von dem Verhältnis $R = \eta_+/\eta_-$ abhängt, sind in den folgenden Untersuchungen die Werte für η_+ und η_- irrelevant und werden durch dieses Verhältnis R ersetzt.

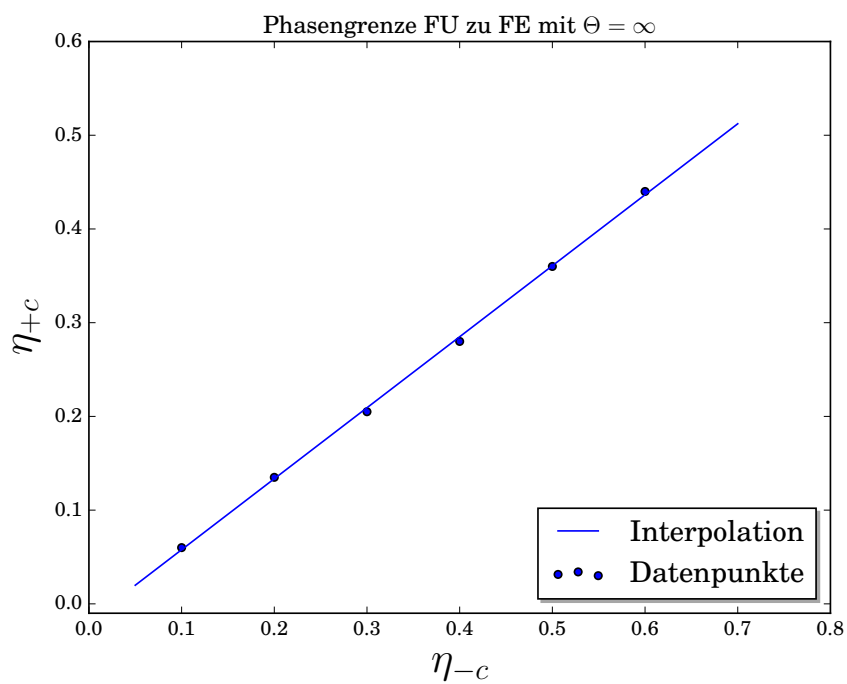
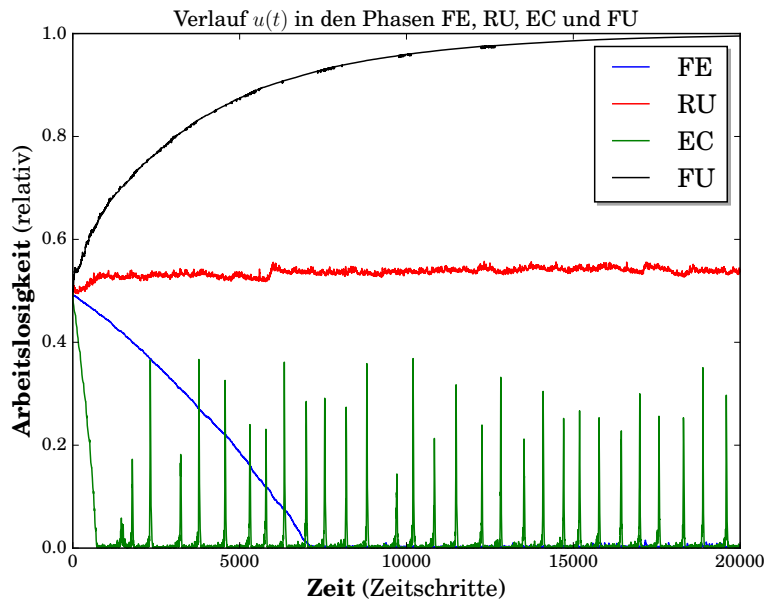


Abbildung 6: Kritische Datenpunkte η_{+c}/η_{-c} , die die Phasen FU und FE voneinander trennen. Die Gerade $\eta_{+c} = a\eta_{-c} + b$ wurde mit Genauigkeit $R^2 > 0.99$ über lineare Regression mit den Parametern $a = 0.757 \pm 0.007$ und $b = -0.018 \pm 0.003$ interpoliert. Unsicherheiten $u(\eta)$ sind vernachlässigbar klein.

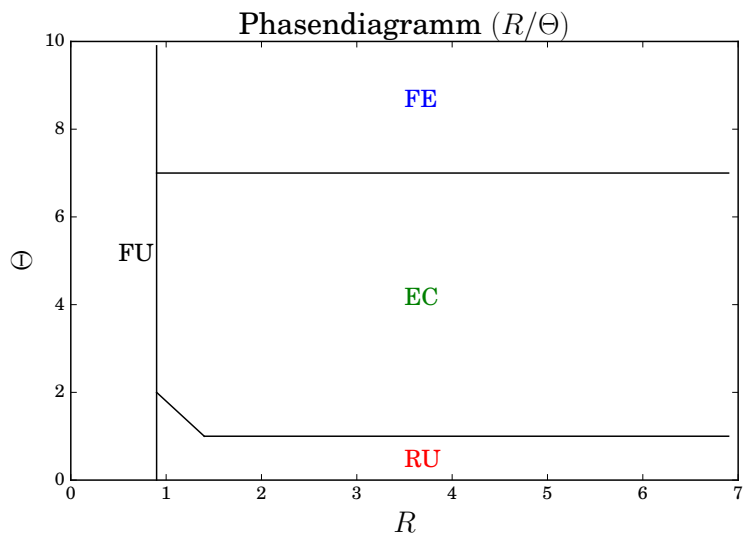
3.2 Der Phasenraum (R/Θ)

Zur weiteren Analyse von Mark 0 wird wie in [1] neben dem Verhältnis R zwischen η_+ und η_- nun auch der Parameter Θ variiert. Es werden für die anderen Parameter die Werte $\beta = 0$, $f = 1$, $c = 0.5$ und $\gamma_p = 0.05$ angenommen, bei den in [1] nicht näher spezifizierten Variablen werden $\delta = 0.02$, $\mu = 1$ und $\varphi = 0.1$ gewählt. Aus Rechenzeitgründen wird $N_F = 500$ gesetzt, was wie die vorangegangene Untersuchung gezeigt hat, dennoch die wichtigsten Charakteristiken des Modells erhält. Nach jeder Simulation des Modells für eine neue Kombination von Θ und R wird die Entwicklung der Arbeitslosigkeit abhängig von der Zeit $u(t)$ ausgewertet. Es bilden sich vier charakteristische Verläufe für $u(t)$ aus, die von vielen Wertepaaren (R, Θ) angenommen werden:

Die Phasen FU und FE aus Abschnitt 3.1 treten in quasi unveränderter Form wieder auf. Erneut ist FU durch ein nahezu monotones Ansteigen der Arbeitslosigkeit auf den Wert 1 gekennzeichnet, wohingegen FE ein Abfallen von u auf den Wert 0 beinhaltet. Während die Phase FU ab einem kritischen Wert von $R_c \in (\frac{4}{5}, 1)$ für alle Θ auftritt, sind für größere R neben FE noch zwei weitere charakteristische Verläufe zu beobachten, die wie in [1] als RU (Remaining Unemployment) und als EC (Endogenous Crisis) bezeichnet werden. Die erste Phase stellt sich für niedrige Werte von Θ und $R > R_c$ ein und weist eine Arbeitslosigkeit auf, die langfristig um einen Wert zwischen 0 und 1 oszilliert. In Abbildung 7(a) ist das Verhalten von $u(t)$ in dieser Phase in rot eingezeichnet und oszilliert hier um den Wert $\frac{1}{2}$. In derselben Abbildung ist in grün $u(t)$ in der Phase EC dargestellt. Diese Phase liegt für mittlere Werte von Θ im Bereich $R > R_c$ vor und weist eine verschwindende Arbeitslosigkeit $u(t) \approx 0$ auf, die jedoch in nahezu periodischen Abständen durch kurze Ausbrüche anwächst. Für noch größere Werte von Θ geht die Phase EC in die bekannte Phase FE über, die in Abbildung 7(a) in blau eingezeichnet ist. Für die ebenfalls schon bekannte Phase FU ist in dieser Abbildung $u(t)$ exemplarisch in schwarz aufgetragen. Ein Diagramm des Phasenraums (R/Θ) ist in Abbildung 7(b) dargestellt. Dieses deckt sich ebenso wie die Verläufe $u(t)$ der verschiedenen Phasen aus Abbildung 7(a) mit dem in [1] angefertigten analogen Diagramm (dort FIG. 4 auf Seite 14), sodass auch diese Analyse des Modells Mark 0 erfolgreich verifiziert wurde.



(a) Beispielhafte Verläufe von $u(t)$ in den Phasen FE (blau, $\Theta = 9.5, R = 1$), RU (rot, $\Theta = 0.5, R = 1$), EC (grün, $\Theta = 2.5, R = 3$) und FU (schwarz, $\Theta = 0.5, R = 0.5$).



(b) Schematisches Phasendiagramm für den Phasenraum (R/Θ) .

Abbildung 7: Darstellung des Phasendiagramms (R/Θ) und die charakteristischen Verläufe von $u(t)$ in den einzelnen Phasen für das Modell Mark 0.

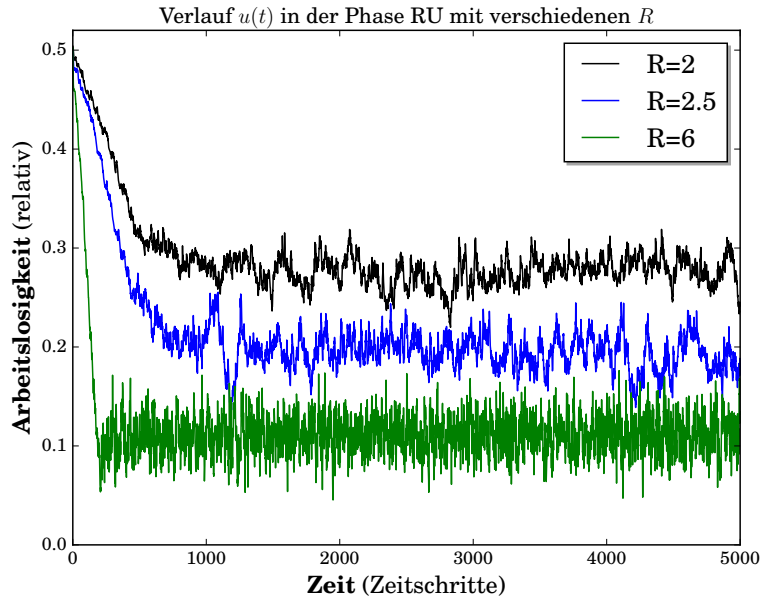
3.3 Weiterführende Untersuchungen der Phasen RU und EC

Der Phasenraum (R/Θ) unterscheidet sich von dem Modell in Abschnitt 3.1 insbesondere dadurch, dass zwei neue Phasen auftreten, RU und EC. Die Verhaltensweisen von $u(t)$ in beiden Phasen werden in diesem Abschnitt genauer analysiert und Hypothesen aufgestellt, wie die jeweiligen Verläufe von $u(t)$ zustande kommen.

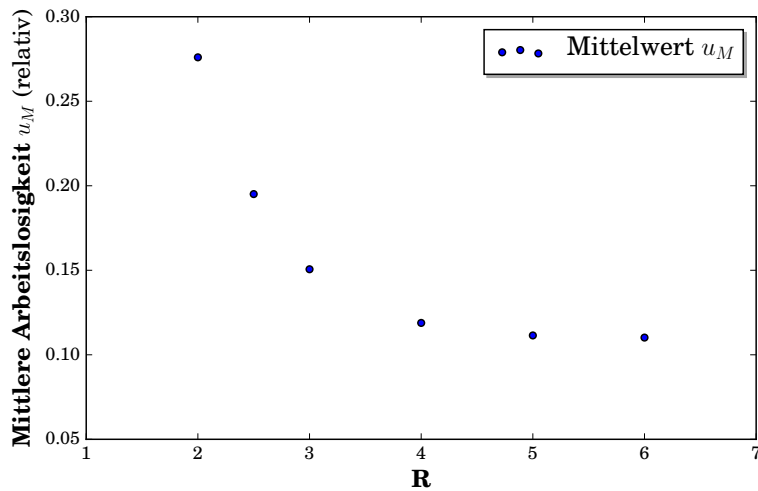
3.3.1 Die Phase RU

Die Phase RU wird dadurch gekennzeichnet, dass die Arbeitslosenquote nicht gegen 0 herabfällt, sondern um einen Wert u_M oszilliert. Es zeigt sich, dass u_M mit steigendem R abnimmt, wie in Abbildung 8(a) illustriert ist, jedoch ab $R \approx 4$ gegen einen nahezu konstanten Wert von $u_M \approx 0.11$ konvergiert. Abbildung 8(b) unterstreicht diese Beobachtung, wobei dort zur Berechnung von u_M jeweils der Mittelwert von $u(t)$ für $t \geq 1000$ gewählt wird, da ab diesem Zeitpunkt sich bereits die Oszillationen in $u(t)$ eingestellt haben.

Dies entspricht der naheliegenden Erwartung, dass für große R , also für ein Neueinstellungen begrüßendes Firmenklima, die Arbeitslosenquote niedriger ist als für kleine R . Für $R \geq 4$ tritt jedoch keine merkliche Veränderung von u_M ein, sodass in diesem Bereich der für die Phase RU niedrige Wert von Θ bzw. die dadurch hervorgerufenen häufigen Insolvenzen von Firmen dominieren und gegenüber Erhöhungen von R , also Verbesserungen der Einstellungspolitik der Firmen, überwiegen.



(a) Beispielhafte Verläufe $u(t)$ in der Phase RU für verschiedene Werte von R . Mit wachsendem R sinkt der Mittelpunkt u_M der langfristigen Oszillation.



(b) Abhängigkeit des Mittelpunkts u_M der Oszillationen in der Phase RU vom Parameter R . Für große R konvergiert u_M gegen ca. 0.11.

Abbildung 8: Illustration der Verschiebung des mittleren Oszillationswertes u_M in der Phase RU und dessen Abhängigkeit vom Parameter R .

3.3.2 Die Phase EC: Eruptionen

Die Phase EC ist durch eine generell niedrige Arbeitslosenquote charakterisiert, die jedoch in aperiodischen Abständen eine Eruption nach oben erlebt und sprunghaft wächst, aber auch genauso abrupt wieder fällt. Eine genaue Abgrenzung zur Phase FE ist schwierig, da die erste Eruption beliebig spät eintreffen kann und demnach gegebenenfalls außerhalb der eigenen Betrachtungszeit ist, sodass der Verlauf von $u(t)$ mit dem in der Phase FU quasi übereinstimmt. Es wird die Zeit τ zwischen zwei Eruptionen untersucht, indem die Eruptionen gezählt werden, wobei hier quasi willkürlich ein zu überschreitender Schwellwert $u(t) \geq 0.05$ gewählt wird. Da auch festgestellt werden muss, wann die Eruption vorbei ist, und weil $u(t)$ in der ansteigenden Flanke der Eruption auch kurzzeitig zurückgehen kann, wird ein Hystereseverhalten für die Auszählung verwendet, sodass eine Eruption erst wieder als abgeklungen zählt, wenn $u(t) < 0.025$ ist. Teilt man nun den betrachteten Gesamtzeitraum T durch die Anzahl an gezählten Eruptionen, so ergibt sich in guter Näherung τ . Es werden hierbei allerdings nur Datensätze verwendet, bei denen innerhalb der $T = 20000$ Zeitschritte mindestens 5 Eruptionen gezählt wurden, um eine ausreichende Genauigkeit zu gewährleisten.

Abbildung 9 zeigt das Ergebnis dieser Untersuchung: Für einen konstanten Wert von R nehmen die Abstände zwischen den Eruptionen mit wachsendem θ ab. Durch eine Interpolation mit dem Programm SciDAVis wurde für jeden der Datensätze mit konstantem R in Abbildung 9 mit Genauigkeit $R^2 > 0.99$ gezeigt, dass es sich bei $\tau(\Theta)$ um ein exponentielles Wachstum handelt. Für wachsendes R nimmt bei gleichem Θ der Wert von τ ab. Dies mag zunächst verwundern, da ein höheres R in Abschnitt 3.1 mit einem Übergang zur Phase der gesunden Wirtschaft FE verknüpft war, wohingegen ein kleineres τ bedeutet, dass die eruptionsartigen Krisen häufiger auftreten. Anders als für Θ wird somit der intuitive Zusammenhang „hohes R führt zur gesunden Wirtschaft“ nicht bestätigt. Vermutlich führt ein hohes R dazu, dass die Firmen sich bezüglich der Anzahl ihrer Arbeitnehmer und somit der Lohnkosten übernehmen und somit bei Krisensituationen anfällig dafür sind, bankrott zu gehen.

Es wird versucht, herauszufinden, welche Entwicklungen zu dem Aus-

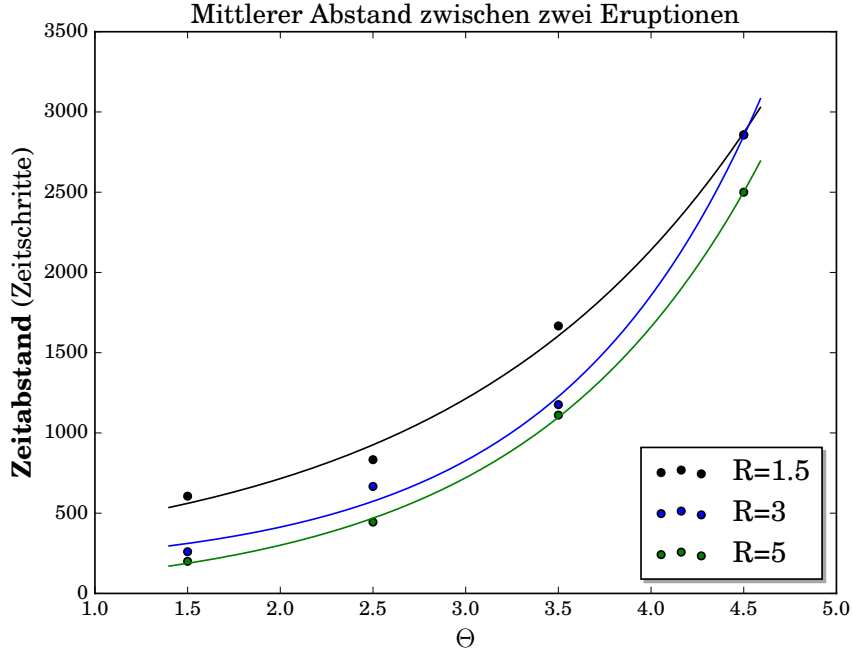


Abbildung 9: Mittlere Abstände τ zwischen zwei Eruptionen der Phase EC abhängig von Θ und R . Die exponentiellen Interpolationen (Linien) wurden mit SciDAVis erstellt.

bruch der Eruptionen führen. Als geeigneter Indikator eignet sich die Konkursmasse $\kappa(t)$, die hier als

$$\kappa(t) = \sum_{i \text{ geht in } t \text{ bankrott}} |\varepsilon_i(t)| \quad (15)$$

definiert wird und somit die Summe der Schulden aller Firmen bezeichnet, die im Zeitschritt t bankrott gegangen sind. Ignoriert man die Werte mit $\kappa(t) = 0$, so ergibt sich ein Verhalten wie in Abbildung 10: Den dort auftretenden Eruptionen geht jeweils eine Verdichtung der Werte von $\kappa(t) > 0$ voran, wobei außergewöhnlich große Werte für $\kappa(t)$ erst auftreten, während die Eruption schon ausgebrochen ist. Vor jeder Eruption tritt also eine Häufung der Bankrotte auf, wobei diese aber keine außergewöhnlich hohen (kumulierten) Konkursmassen aufweisen. Es ist also keine Firma von systemrelevanter Größe, deren Bankrott die Eruptionen auslöst, sondern die Kette von Bankrotten mehrerer kleiner Firmen. Der Gedanke, dass eine Firma der

Größenordnung „Too Big to Fail“ durch ihren Bankrott eine Krise auslöst, scheint zwar intuitiv schlüssig zu sein, erklärt aber nicht alle auftretenden Eruptionen.

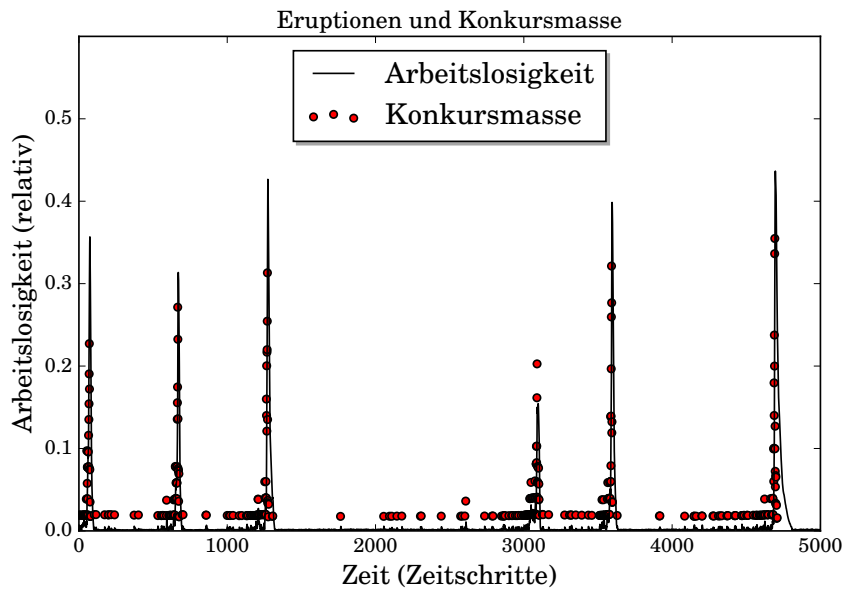


Abbildung 10: In schwarz $u(t)$ für die Phase EC, in rot $\kappa(t) > 0$, das so gestaucht wurde, dass es im Diagramm dargestellt werden kann. Deutlich erkennbar ist, dass vor jeder Eruption sich die Anzahl an Zeitpunkten mit $\kappa(t) > 0$ verdichtet und somit die Konkursmasse aufstaut.

3.3.3 Übergang von EC nach RU

Es stellt sich somit die Frage, ob neben den Auslösern der Eruptionen der Phase EC auch das Verhalten von $u(t)$ in RU erklärt werden kann. Abschnitt 3.3.2 hat gezeigt, dass ein niedrigerer Wert für Θ in einem geringeren Abstand zwischen den Eruptionen resultiert. Da die Eruptionen eine endlich große Breite haben, würde irgendwann der Punkt erreicht werden, an dem die nachfolgende Eruption schon beginnt, bevor die erste abgeklungen ist. Um diesen Übergang zu untersuchen, werden künstliche Eruptionen als Dreiecksverteilungen mit zufälliger Höhe, Breite von 19 Zeitschritten und festen Abständen τ zwischen den Spitzen der Eruptionen initialisiert, wie in Abbildung 11 gezeigt. Für $\tau \gg 19$ (oben) wird näherungsweise der Verlauf von $u(t)$ in EC reproduziert, für $\tau < \frac{19}{2}$ (unten) überlagern sich die Eruptionen, sodass der resultierende Graph nicht mehr auf 0 herabfällt und das Aussehen an $u(t)$ in RU erinnert.

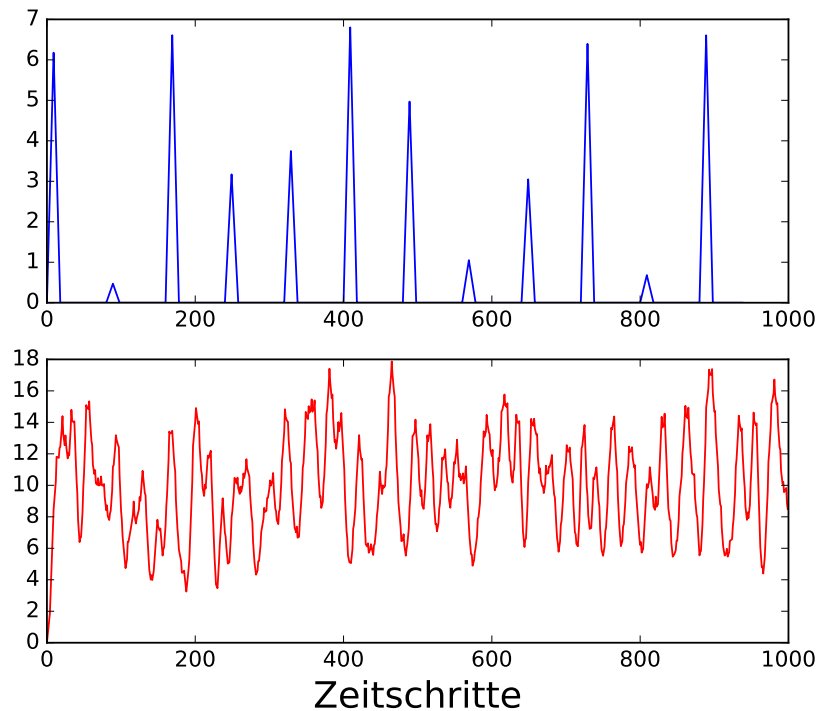


Abbildung 11: Überlagerungen von künstlichen Eruptionen der Breite 19 Zeitschritte mit Abständen $\tau \gg 19$ (blau) und $\tau < \frac{19}{2}$.

3.4 Zwischenfazit

In Abschnitt 3.1 und 3.2 wurde gezeigt, dass die wesentlichen Verhaltensweisen des Modells Mark 0 aus [1] trotz der geringeren Systemgröße N_F reproduziert werden konnten. Die Phasendiagramme in Abbildungen 6 und 7(b) entsprechen denen in [1] nicht nur qualitativ, sondern auch in der quantitativen Größenordnung der Übergangsbereiche zwischen den Phasen. Zu betonen ist vor allen Dingen das erfolgreich reproduzierte Auftreten der Eruptionen in der Phase EC, die quasi aus dem nichts durch die interne Dynamik des Systems eine Krise auftreten lassen, was eine deutliche Veränderung zu den zuvor in der Ökonomie primär betrachteten Modellen bedeutet, in denen solche Krisen wegen der Markteffizienzhypothese nur durch externe Einflüsse entstehen [9]. Die Markteffizienzhypothese wird ebenso von Seiten der Econophysik in z.B. [10] stark in Frage gestellt.

In Abschnitt 3.3 konnten die Gründe für das Verhalten von $u(t)$ in den Phasen EC und RU genauer erklärt und interpretiert werden, was die Untersuchung dieser Phasen aus [1] ergänzt. Insbesondere die Beobachtung aus Abbildung 11, dass die Phänomenologie der Phase EC durch kleine Abstände τ zwischen den Eruptionen in die der Phase RU übergeht, ist bemerkenswert, da dies auch zur Position der beiden Phasen im Phasendiagramm 7(b) passt: Dort liegt RU für kleine Werte von Θ vor, EC für größere, wobei τ aber sich zu Θ monoton verhält und für kleine Θ (also an der Grenze zwischen EC und RU) ebenfalls klein wird. Es ist also durchaus strittig, ob es sich bei EC und RU überhaupt um zwei grundlegend verschiedene Phänomene handelt.

4 Modellerweiterung: Globalisierung

Der Globalisierung ist es egal, ob die Leute sie mögen oder nicht.

- Prof. Dr. Hermann Simon [6]

Es bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, das Modell Mark 0 wie in Abschnitt 2.5 zu erweitern. Einige Parameter wie z.B. f und β , die hier bisher nicht im Detail analysiert wurden, können ebenfalls variiert werden, um das Systemverhalten zu ändern. Eine kompliziertere Veränderung ist es, eine Aktualisierung der Löhne in den Gleichungensatz (8) einzuführen. In [1] wird dafür die Aktualisierungsregel

$$\begin{aligned} W_i^T(t+1) &= W_i(t)[1 + \gamma_w E \xi_i(t)] && \text{für } Y_i(t) < D_i(t) \text{ und } \mathcal{P}_i(t) > 0 \\ W_i(t+1) &= W_i(t)[1 - \gamma_w u \xi_i(t)] && \text{für } Y_i(t) > D_i(t) \text{ und } \mathcal{P}_i(t) < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

zum System hinzugefügt: Für eine gute Wirtschaftslage der Firma i werden die Löhne um eine Zufallszahl $\gamma_w \xi_i(t)$ erhöht, wobei eine hohe Erwerbstätigenquote E auch in höheren Lohnerrhöhungen resultiert, da die Arbeitgeber um die Arbeitnehmer konkurrieren müssen. Der Index T steht hierbei dafür, dass der neue Lohn aber dennoch nur maximal so hoch gewählt wird, dass $\mathcal{P}_i(t) > 0$ bleibt und die Firma durch ihre Lohnanpassung nicht in finanzielle Schieflage gerät. Für eine schlechte wirtschaftliche Lage der Firma i werden die Löhne um dieselbe Zufallszahl $\gamma_w \xi_i(t)$ verringert, wobei hohe Arbeitslosenquoten u in stärkeren Lohnkürzungen resultieren, da bei hoher Arbeitslosigkeit die Firmen ihre Angestellten leicht ersetzen können. Für eine detaillierte Analyse dieser Modifikationen und ihrer Auswirkungen wird auf [1] verwiesen. Anstatt die dortigen Ergebnisse zu reproduzieren, wird hier versucht, eine neue Erweiterung von Mark 0 einzuführen: Ein globalisiertes Wirtschaftsmodell mit individuellen, miteinander verknüpften Wirtschaftsräumen.

4.1 Durchlässigkeit zwischen den Wirtschaftsräumen

Es wird im einfachsten Fall betrachtet, wie zwei verschiedene Wirtschaftsräume miteinander interagieren. Jeder der einzelnen Räume funktioniert so, wie es in Abschnitt 2.5 beschrieben ist, einzig Gleichung (5) für die Nachfrage wird modifiziert und in eine Inlandsnachfrage $D_i^D(t)$ und Auslandsnachfrage $D_i^F(t)$ aufgeteilt, wobei für die Gesamtnachfrage $D_i(t) =$

$D_i^D(t) + D_i^F(t)$ gilt. Es wird eine Durchlässigkeit $\rho \in [0, 1]$ zwischen den Wirtschaftsräumen definiert, wobei $\rho = 0$ eine komplette Isolation und $\rho = 1$ den maximalen Abbau aller Handelshürden wie Zölle etc. darstellen. Es wird daher gefordert, dass für zwei in allen Parametern identische Firmen aus den verschiedenen Wirtschaftsräumen D die Nachfrage aus dem Wirtschaftsraum (1) nach den Produkten der Firma aus dem eigenen Wirtschaftsraum ist und die Nachfrage nach den Produkten der ausländischen Firma ρD ist. Da in Gleichung (5) eine Normierung der Nachfrage eingeführt wird, indem die gesamte kumulierte Nachfrage der Konsumenten im Nenner der Gleichung erscheint, muss eine analoge Anpassung auch in diesem modifizierten System vorkommen. Für eine Firma i aus dem Wirtschaftsraum 1 (im Folgenden als $i \in (1)$ bezeichnet) ergibt sich damit als Inlandsnachfrage

$$D_i^D(t) = \frac{C_B^{(1)}}{p_i} \frac{\exp(-\beta^{(1)} p_i / \bar{p}^{(1)})}{\sum_{j \in (1)} \exp(-\beta^{(1)} p_j / \bar{p}^{(1)}) + \sum_{k \in (2)} \rho \exp(-\beta^{(1)} p_k / \bar{p}^{(1)})} \quad (17)$$

sowie für die Auslandsnachfrage

$$D_i^F(t) = \frac{C_B^{(2)}}{p_i} \frac{\rho \exp(-\beta^{(2)} p_i / \bar{p}^{(2)})}{\sum_{j \in (1)} \rho \exp(-\beta^{(2)} p_j / \bar{p}^{(2)}) + \sum_{k \in (2)} \exp(-\beta^{(2)} p_k / \bar{p}^{(2)})} \quad (18)$$

und insgesamt $D_i(t) = D_i^D(t) + D_i^F(t)$. Dieselben Gleichungen gelten unter Vertauschung von (1) und (2) für eine Firma aus dem Wirtschaftsraum 2. Die hochgestellten Indizes bei z.B. $\bar{p}^{(1)}$ zeigen an, auf welchen Raum sich die indizierte Variable bezieht.

4.2 Unterschiedliche Systeme

Die hier folgenden Testergebnisse beschreiben alle die Situation für zwei Systeme mit unterschiedlichen Systemgrößen $N_F^{(1)} = 200$, $N_F^{(2)} = 100$ und identischen Parametern $\mu = 1$, $C = 0.5$, $\beta = 0$, $\gamma_p = 0.05$, $\delta = 0.02$, $\varphi = 0.1$ und $f = 1$. Es werden $\Theta^{(1)} = 4.5$, $\Theta^{(2)} = 1.5$ und $R^{(1)} = R^{(2)} = 2$ gesetzt, sodass beide Systeme ohne Interaktion miteinander sich in der Phase EC befinden. Für einen Permeabilitätswert $\rho = 0$ tritt auch dieses Verhalten in Abbildung 12 auf, in der beide Wirtschaftsräume unabhängig voneinander die typischen Eruptionen der Phase EC aufzeigen.

Für mittlere Werte von ρ zeigt sich ein Verhalten wie in Abbildung 13(a).

Hier ist $\rho = 0.2$ und das kleinere und wirtschaftlich schwächere System ($N_F^{(2)} = 100$ und $\Theta^{(2)} = 1.5$ verglichen mit $N_F^{(1)} = 200$ und $\Theta^{(1)} = 4.5$) zeigt einen Verlauf von $u^{(2)}(t)$, der der Phase RU entspricht, nicht aber der Phase EC. Es scheint, als hätte sich das Phasendiagramm von System 2 im (R/Θ) -Raum verschoben. Eine mögliche Erklärung für diese Beobachtung ist, dass die Interaktion zwischen den beiden Wirtschaftsräumen zulasten des wirtschaftlich schwächeren Raumes geht, der von den mehr Firmen ($N_F^{(1)} > N_F^{(2)}$) und deren höherer Widerstandsfähigkeit ($\Theta^{(1)} > \Theta^{(2)}$) gegenüber Krisen im Wettbewerb mit dem wirtschaftlich stärkeren Raum erdrückt wird.

Für $\rho = 1$ verschwindet dieser unerwartete Verlauf von $u^{(2)}(t)$. Stattdessen synchronisieren sich die Krisen der beiden Wirtschaftsräume wie in Abbildung 13(b), wobei die Abstände τ zwischen den Eruptionen sich gemäß den Überlegungen aus Kapitel 3.3.2 an dem größeren Wirtschaftsraum 1 orientieren, wie ein Vergleich mit den Abständen in Abbildung 12 im ungekoppelten Fall $\rho = 0$ zeigt.

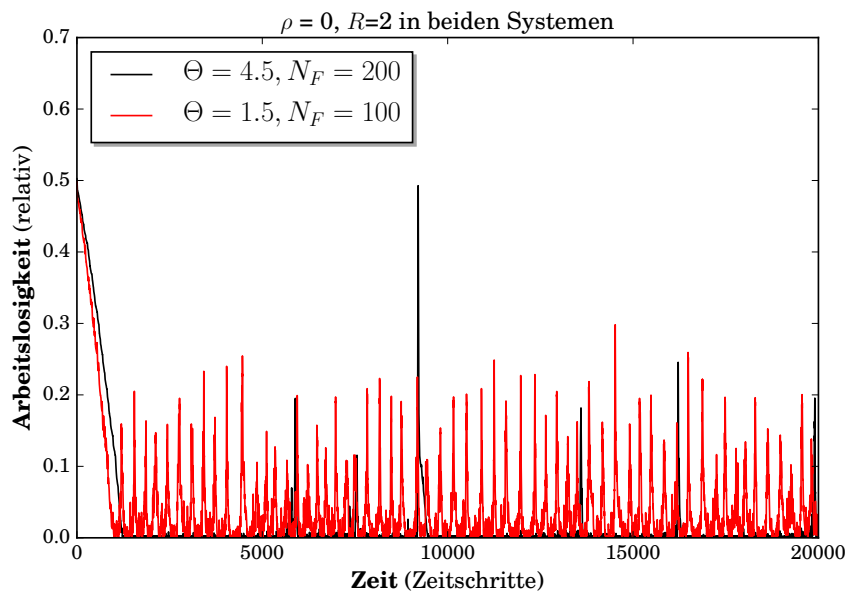
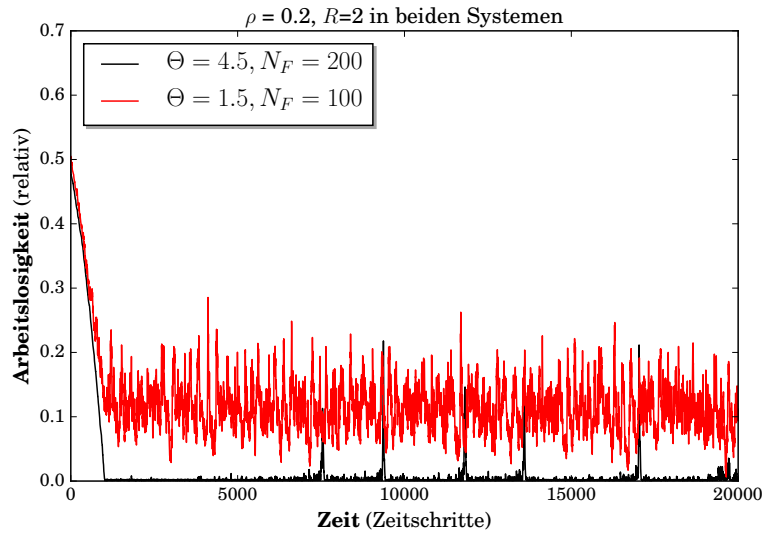
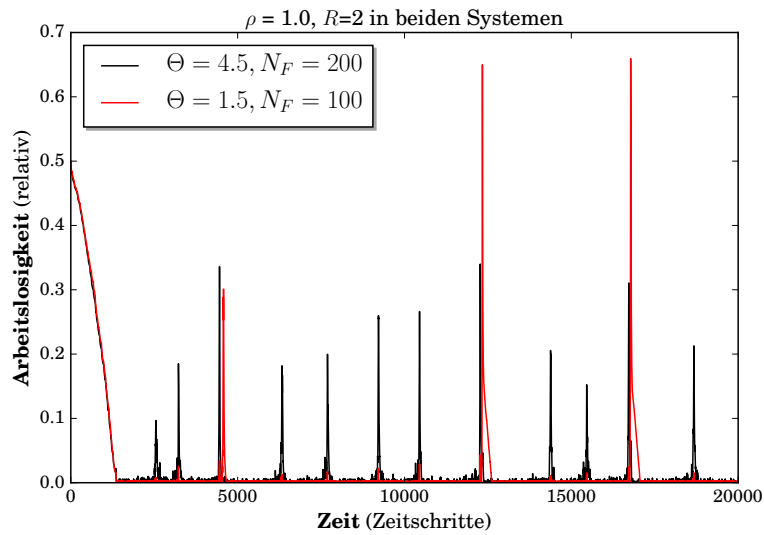


Abbildung 12: Beispielhafte Verläufe $u^{(1)}(t)$ (schwarz) und $u^{(2)}(t)$ (rot) der beiden wie in 4.1 miteinander interagierenden Wirtschaftsräume 1 und 2 für Durchlässigkeit $\rho = 0$.



(a) Durchlässigkeit $\rho = \frac{1}{5}$.



(b) Synchronisation bei maximaler Durchlässigkeit $\rho = 1$.

Abbildung 13: Beispielhafte Verläufe $u^{(1)}(t)$ (schwarz) und $u^{(2)}(t)$ (rot) der beiden wie in 4.1 miteinander interagierenden Wirtschaftsräume 1 und 2 für Durchlässigkeit $\rho = \frac{1}{5}$ in 13(a) und $\rho = 1$ in 13(b).

4.3 Identische Systeme

Nun wird die Interaktion zwischen zwei identischen Systemen betrachtet, die sich nur hinsichtlich ihrer Systemgröße $N_F^{(1)} = 200$ und $N_F^{(2)} = 100$ unterscheiden. Insbesondere werden im Vergleich zur vorherigen Untersuchung nun $\Theta^{(1)} = \Theta^{(2)} = \Theta$ gesetzt. Dieses Θ wird nun für vollständige Durchlässigkeit $\rho = 1$ variiert. Naiv wäre zu vermuten, dass sich beide Systeme nun zusammen wie ein System aus Kapitel 3 verhalten müsste, was jedoch nicht auftritt, da beide Systeme immer noch individuelle Konsumbudgets $C_B^{(i)}$ bzw. Ersparnisse $S^{(i)}$ besitzen. Abbildung 14 zeigt beispielhaft, dass ein synchronisierter Verlauf von $u^{(i)}(t)$ wie in Abbildung 13(b) für diese identischen Systeme nicht auftritt. Es ist somit noch unklar, unter welchen Bedingungen die naiv zu erwartende Synchronisation der beiden Wirtschaftsräume tatsächlich auftritt.

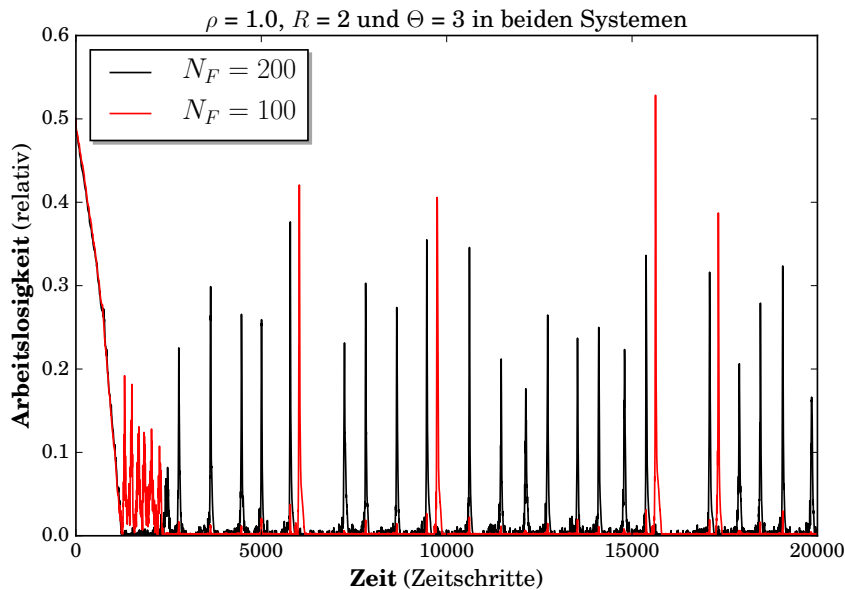


Abbildung 14: Beispielhafter Verlauf von $u(t)$ in zwei bezüglich R und Θ identischen Systemen der (individuellen) Phase EC, die mit Durchlässigkeit $\rho = 1$ miteinander interagieren.

5 Bifurkation und Hysterese

Man braucht nichts im Leben zu fürchten, man muss nur alles verstehen.

- Marie Curie

Bifurkationsdiagramme sind hilfreiche Werkzeuge zur Beschreibung von nichtlinearen Systemen. Sie können Phänomene wie z.B. Hystere erklären, indem sie die instabilen und stabilen Fixpunkte eines Systems darstellen. Für nicht-deterministische Systeme wie das in dieser Arbeit behandelte Mark 0 ist keine Gleichung $\dot{x} = F(x, \alpha)$ gegeben, sodass die Analysemethode der Stochastischen Kontinuierung angewandt werden muss, die in Abschnitt 2.6.3 beschrieben wird. In diesem Kapitel werden das in Mark 0 auftretende Hystereseverhalten und die Anwendung der Stochastischen Kontinuierung auf das Modell Mark 0 diskutiert.

5.1 Hysterese

Das System Mark 0 wird auf ein Hystereseverhalten im Phasenübergang untersucht. Dazu wird für $\Theta = 8$ der Bereich von R betrachtet, der an der Grenze zwischen den Phasen FU und FE liegt. Das System wird hierbei nur ein einziges Mal initialisiert und der Parameter R nach T Zeitschritten verringert bzw. erhöht, ohne dass das System erneut initialisiert wird. Wegen des z.T. sehr langsam steigenden Verlaufs von $u(t)$ in der Phase FU nahe bei der Phasengrenze zu FE (vgl. Abbildung 7(a)) wird $T = 50000$ gesetzt. Für die Simulation mit fallendem R wird eine Intervallbreite von $\Delta R = 0.0005$, für die mit steigendem R von $\Delta R = 0.001$ gewählt. Bevor nach T Zeitschritten der Wert von R variiert wird, wird die aktuelle Arbeitslosenquote $u(n \cdot T)$ als u_{end} am Ende der n -ten Iteration aufgenommen. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in Abbildung 15 dargestellt. Der Übergang zwischen $u_{\text{end}}(R) \approx 1$ und $u_{\text{end}}(R) \approx 0$, welcher äquivalent zum Phasenübergang zwischen FU und FE ist, findet für die beiden Messreihen R_{fallend} und R_{steigend} an verschiedenen Übergangswerten R_t statt; es liegt also ein Hystereseverhalten vor. Für R_{fallend} , das in der Phase FE startet, bleibt die Phase FE länger für niedrigere Werte von R erhalten, für das aus FU startende R_{steigend} ist es andersherum. Das System besitzt also eine Art Gedächtnis, das über eine Vielzahl von Iterationen erhalten bleibt.

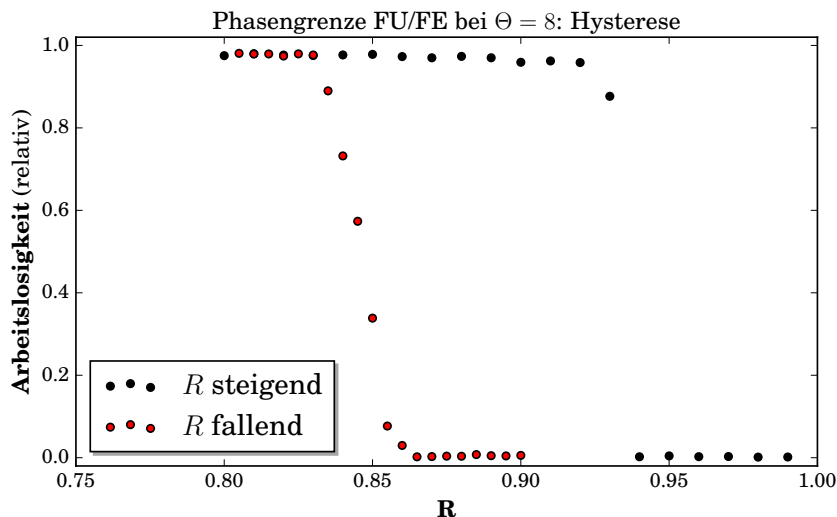


Abbildung 15: Verlauf von $u_{\text{end}}(R)$ für jeweils 50000 Zeitschritte pro Wert von R für fallendes (rot) bzw. steigendes (schwarz) R . Deutlich zu sehen ist die unterschiedliche Position des Übergangs zwischen $u_{\text{end}}(R) \approx 1$ und $u_{\text{end}}(R) \approx 0$.

5.2 Stochastische Kontinuierung von Mark 0

Um die Stochastische Kontinuierung auf das Modell Mark 0 anzuwenden, ist es notwendig, eine sinnvolle Wahl für das Structure Lifting zu treffen. Wurde das System vorher bei einer Arbeitslosenquote von u erstellt und soll nun ein System mit Arbeitslosenquote u' erstellt werden, wird für jede Firma i die Produktivität bzw. Beschäftigtenzahl Y_i mit dem Faktor $(1-u')/(1-u)$ multipliziert. Sollte die Beschäftigtenquote E' nach dem Structure Lifting den Wert 100 Prozent überschreiten, wird die Beschäftigtenquote mit einer Division durch E' normiert. Mit dieser Wahl des Structure Lifting bleibt u.a. die relative Verteilung der Größen von Y_i erhalten.

Durch die Betrachtung der Hysterese in Abbildung 15 lässt sich der Verlauf des instabilen Astes zwischen den beiden stabilen Ästen abschätzen. Es wird daher vermutet, dass der instabile Ast einen Verlauf hat, der qualita-

tiv dem schematischen Verlauf in Abbildung 16 entspricht. Wird die Stochastische Kontinuierung so auf einem der stabilen Äste begonnen, dass sie sich dem instabilen Ast nähert, muss in Bewegungsrichtung der Kontinuierung eine Rechtskurve überwunden werden. Daher wird der Algorithmus der Stochastischen Kontinuierung modifiziert, sodass nicht wie in Abbildung 2 der Schätzer für den nächsten Phasenraumpunkt durch eine extrapolierte Gerade gewählt wird, sondern rechts hiervon. Details zu den gewählten Parametern der Stochastischen Kontinuierung finden sich im Anhang unter Abschnitt 8.2.

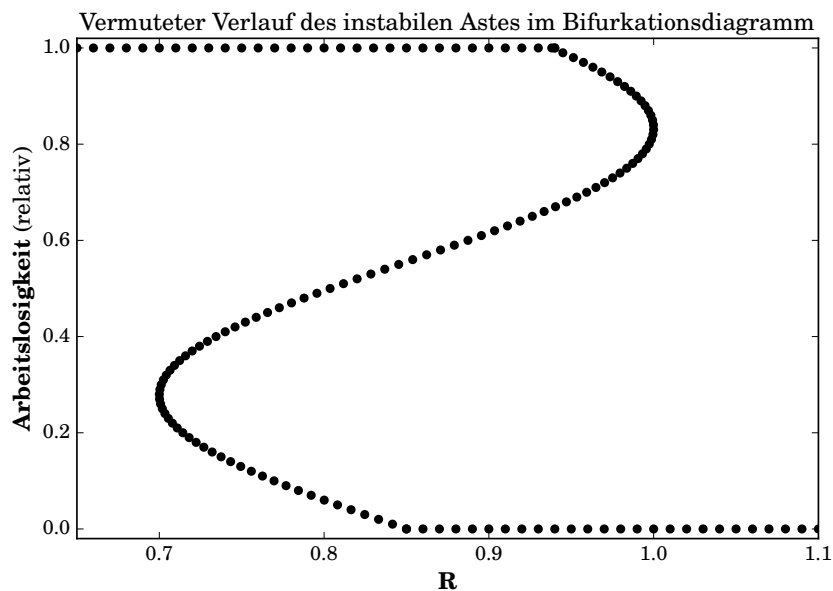


Abbildung 16: Schematische Erwartung des qualitativen Verlaufes des instabilen Astes aus Abbildung 15. Die geraden Strecken entsprechen hierbei den stabilen Fixpunkten, die Krümmung dem instabilen Ast. Die hier angegebenen Werte haben keinen Anspruch auf quantitative Genauigkeit.

5.3 Ergebnisse der Kontinuierung

Der Stochastischen Kontinuierung gelingt es, einige Punkte des Bifurkationsdiagramms zu erstellen. Wird die Kontinuierung von dem oberen stabilen Ast gestartet, kann mit der oben beschriebenen Modifikation der

Extrapolation ein Teil der Kurve des instabilen Astes nachgezeichnet werden, wie in Abbildung 17. Bei einem Start auf dem unteren stabilen Ast des Bifurkationsdiagramms gelingt dies nicht. Doch auch beim Start auf dem oberen stabilen Ast gelingt es nicht, die Kurve vollständig zu beschreiten, sodass der Algorithmus der Kontinuierung ab einem Stoppunkt keine zuverlässigen Ergebnisse mehr liefert.

Drei wesentliche Beobachtungen lassen sich anhand dieser Ergebnisse feststellen:

Der von unten startende Kontinuierung gelingt es nicht, den instabilen Ast zu beschreiten. Hingegen erreicht die von oben startende Kontinuierung zumindest den Beginn des instabilen Astes. Es scheint, dass das Structure Lifting demnach für die von unten startende Kontinuierung schlechter funktioniert als für die von oben startende Kontinuierung. Möglicherweise wird eine Normierungsbedingung im Regime der kleinen Arbeitslosenquoten im Structure Lifting nicht ausreichend berücksichtigt.

Auch wenn die Kontinuierung von oben den instabilen Ast beschreiten kann, gelingt es nicht, den Ast über die Krümmung hinaus zu verfolgen. Auch mit Änderungen der maximalen Berechnungszeit pro Bifurkationspunkt oder Erhöhung der Anzahl an Systemen, die pro Bifurkationspunkt erstellt werden, gelingt es nicht, den instabilen Ast weiter zu verfolgen. Es ist hierbei noch unklar, ob die stochastischen Fluktuationen des Modells zu groß sind, um im gewählten Parametersatz die Kontinuierung abzuschließen, oder ob auch das Structure Lifting verbessert werden muss.

Abschließend ist zu bemerken, dass in Abbildung 17 der obere stabile Ast schon bei einem $R < 0.9$ auf den instabilen Ast fällt, wohingegen in Abbildung 15 der obere stabile Ast erst ab $R \approx 0.93$ zum unteren stabilen Ast abfällt. Wenn die in Abbildung 15 gewählte Relaxationszeit groß genug gewählt wurde, so muss demnach ein instabiler Ast zwischen $R = 0.9$ und 0.93 vorliegen.

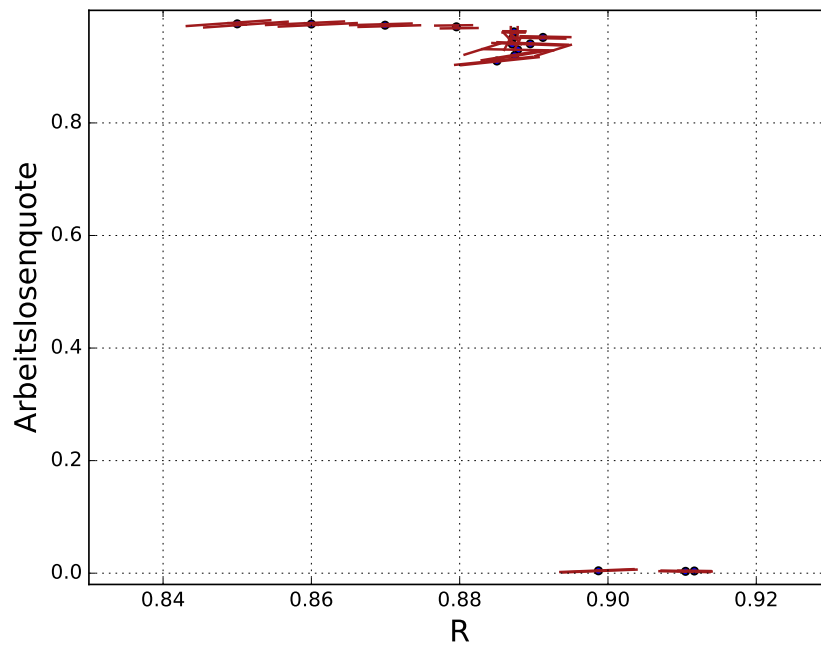


Abbildung 17: Ergebnisse der Stochastischen Kontinuierung für das Bifurkationsdiagramm von Mark 0. Eingezeichnet sind die stabilen und instabilen Punkte inklusive Unsicherheiten, die durch die Stochastische Kontinuierung berechnet werden konnten. Es ist zu erkennen, dass vom oberen stabilen Ast ausgehend (Vgl. Abbildung 15) ein instabiler Ast beginnt, der sich in Richtung des unteren stabilen Astes krümmt. Dies konnte jedoch von der Stochastischen Kontinuierung nicht weiterverfolgt werden.

6 Fazit und Ausblick

Nicht alles Wünschenswerte ist erreichbar, nicht alles Erkennenswerte erkennbar.

- Johann Wolfgang von Goethe

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurde erfolgreich das Modell Mark 0 nachgebildet und untersucht. Die Phasendiagramme in den Abbildungen 6 und 7 entsprechen denen aus [1], sodass die dort erfolgten Modelluntersuchungen verifiziert werden konnten. Die Untersuchung des Verlaufs von $u(t)$ in den Phasen EC und RU in Kapitel 3.3 führt letztlich zu der Hypothese, dass die Phasen EC und RU stetig ineinander übergehen.

Mit einer Modellerweiterung zu einer Globalisierung der Wirtschaft wird in Kapitel 4.1 untersucht, ob die Verläufe von $u^{(1,2)}(t)$ in zwei miteinander verbundenen Wirtschaftsräumen einander beeinflussen. Je nach Parameterwahl werden u.a. ein Wechsel des „schwächeren“ Wirtschaftsraumes aus seiner individuellen Phase, eine Synchronisierung der Eruptionen in beiden Wirtschaftsräumen (jeweils Abbildung 12) oder auch schwer zu erklärende Verläufe (Abbildung 14) beobachtet. Es bietet sich an, hier eine genauere Untersuchung anzusetzen, wobei mit den Parametern $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ und ρ es fünf Variablen gibt, deren Einfluss auf das Systemverhalten berücksichtigt werden muss, sodass die Untersuchung sich als deutlich aufwändiger als die Analyse des einzelnen Wirtschaftsraumes erweist. Wünschenswert ist, dass es möglich wäre, die Zahl an relevanten Variablen zu verringern, ähnlich wie im einzelnen Wirtschaftsraum die Parameter η_+ und η_- ohne Informationsverlust zum Quotienten R zusammengefasst werden können.

In einer ersten Betrachtung, bei der das Systemverhalten sich für eine große Relaxationszeit zu einem stabilen Zustand hin entwickeln sollte, lässt sich anhand von Abbildung 15 ein Hystereseverhalten beobachten. Die Anwendung der Stochastischen Kontinuierung auf Mark 0 zeichnet zwar einen Teil des Bifurkationsdiagrammes in Abbildung 17 nach, scheitert aber daran, den instabilen Ast vollständig darzustellen. Grundsätzlich scheint die Stochastische Kontinuierung auch auf nicht-deterministische, agentenbasierte Modelle wie Mark 0 anwendbar zu sein, allerdings liegen offenbar Probleme vor, den instabilen Ast zu verfolgen. Eine signifikante Erhöhung der Rechen-

zeit pro Phasenraumpunkt könnte dazu führen, dass diese Fluktuationen sich ausgleichen. Im Rahmen der für die Bachelorarbeit zur Verfügung stehenden Zeit wurde dies bereits ohne nennenswerte Ergebnisse versucht, doch eine drastische Erhöhung der Rechenzeit bietet sich als weitere Untersuchung über diese Bachelorarbeit hinaus an. Da die Stochastische Kontinuierung für den oberen stabilen Ast allerdings bessere Ergebnisse liefert als für den unteren, muss zunächst untersucht werden, ob das Structure Lifting für das Regime der kleinen Arbeitslosenquoten $u \approx 0$ noch verbessert werden kann.

Das Verständnis des Systems Mark 0 wird somit durch die vorliegende Arbeit weiter vorangetrieben. Die Stochastische Kontinuierung scheint grundsätzlich geeignet zu sein, auch agentenbasierte, stochastische Systeme zu untersuchen, muss hierfür allerdings noch dem zu untersuchenden System angepasst und verfeinert werden.

7 Literatur

- [1] Stanislao Gualdi, Marco Tarzia, Francesco Zampon und Jean-Philippe Boucaud. Tipping points in macroeconomic Agent-Based models. arXiv:1307.5319v4, 2014.
- [2] Barkley Rosser. The Nature and Future of Econophysics. James Madison University, 2006.
- [3] Hiroki Sayama. Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems. Open SUNY Textbooks, 2015.
- [4] Anirban Chakrabortia, Ioane Muni Toke, Marco Patriarca, Frédéric Abergel. Econophysics: Empirical facts and agent-based models. arXiv:0909.1974, 2009.
- [5] Robert Axtell. Why Agents? On the Varied Motivations for Agent Computing in the Social Sciences. Brookings Institution, Washington D.D., November 2000.
- [6] Prof. Dr. Hermann Simon. Geistreiches für Manager, Campus Verlag, 2000.
- [7] A. Archer, O. Kamps, D. Lloyd, U. Thiele, C. Willer. Stochastic Continuation: Basic Idea and Ising Example. DPG Frühjahrstagung , Berlin, Vortrag vom 13.03.2018.
- [8] A. Archer, O. Kamps, D. Lloyd, U. Thiele, C. Willer. Stochastic Continuation: Basic Idea and Ising Example, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [9] Wilson Sy. Endogenous crisis and the economic paradigm. real-world economics review, issue no. 59, University of Western Sidney, 2012.
- [10] František Slanina. Essentials of Econophysics Modelling. Oxford University Press, 2014.
- [11] Harald Ibach, Hans Lüth: Festkörperphysik - Einführung in die Grundlagen. Springer, 2009.
- [12] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, W. Rodejohann. Teilchen und Kerne - Eine Einführung in die physikalischen Konzepte. Springer, 2014.

- [13] Salvatore Miccichè, Giovanni Bonanno, Fabrizio Lillo, Rosario N. Mantegna. Volatility in Financial Markets: Stochastic Models and Empirical Results. *Physica A* 314, 756, 2002. arXiv:cond-mat/0202527.
- [14] Jean-Philippe Bouchaud, Marc Potters. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, 2003.
- [15] Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou, Luís A. Nunes Amaral, Martin Meyer, H. Eugene Stanley. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Phys. Rev. E* 60, 5305, 1999.
- [16] Rama Cont. Scaling and correlation in financial data. arXiv:cond-mat/9705075v3, 1997.
- [17] Juan Carlos. On Some Properties of the Sandpile Model of Self-Organized Critical Systems. *Computación y Sistemas* Vol. 8 Núm. 2, 2004.
- [18] Rama Cont. Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based-Models. *Long Memory in Economics* (S. 289-309), Springer, 2007.
- [19] M. Youssefmir, B. A. Huberman, T. Hogg. *Journal of Economic Behavior and Organization* 32, 101, 1997.
- [20] William A. Brock, Cars H. Hommes. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 22, 1998.
- [21] J. Doyne Farmer, Duncan Foley. The economy needs agent-based modelling. *nature* 460, 6. August 2009.
- [22] Mark Buchanan. This Economy Does Not Compute. *The New York Times*, 1. Oktober 2008. Ebenso unter <https://www.nytimes.com/2008/10/01/opinion/01buchanan.html?module=ArrowsNav&contentCollection=Opinion&action=keypress®ion=FixedLeft&pgtype=article>, Abruf am 19.06.2018.
- [23] Spencer A. Thomas, David J.B. Lloyd, Anne C. Skeldon. Equation-free analysis of agent-based models and systematic parameter determination. *Physica A* 464 (2016) 27–53.

- [24] Fabian Zelesinski. Bewertung von mehrdimensionalen Perpetual Options. Münster, 2016.

8 Anhang

8.1 Symbolverzeichnis

Zur Übersichtlichkeit und Lesefreundlichkeit folgt hier ein Symbolverzeichnis, das die Variablen auflistet, die in Mark 0 als Repräsentanten von (volks-) wirtschaftlichen Größen genutzt werden.

N_F	Anzahl der Firmen zum Zeitpunkt des Modellstarts
μ	μN_F ist die Anzahl der Konsumenten
$Y_i(t)$	Produktionsmenge der Firma i zum Zeitpunkt t
$W_i(t)$	Lohn bei der Firma i zum Zeitpunkt t
$p_i(t)$	Preis für ein Produkt der Firma i zum Zeitpunkt t
$D_i(t)$	Nachfrage nach dem Produkt der Firma i zum Zeitpunkt t
$\tilde{u}_i(t)$	Anzahl der zum Zeitpunkt t einen Arbeitsplatz bei der Firma i anstrebenden Arbeitslosen
$\mathcal{P}_i(t)$	Profit der Firma i zum Zeitpunkt t
$\varepsilon_i(t)$	Finanzielle Rücklagen der Firma i zum Zeitpunkt t
$\Phi_i(t)$	Finanzielle Stabilität der Firma i zum Zeitpunkt t
$\xi_i(t)$	Auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable
η_+	Bereitschaft der Firmen zu Neueinstellungen von Arbeitnehmern
η_-	Bereitschaft der Firmen zur Entlassung von Arbeitnehmern
γ_p	Bereitschaft der Firmen zur Preisänderung
β	Preissensitivität der Konsumenten
\bar{p}	Gemittelter Referenzpreis
\bar{w}	Gemittelter Referenzlohn
S	Ersparnisse der Konsumenten
C_B	Konsumbudget der Konsumenten
c	Für den Konsum zur Verfügung stehender Anteil der Ersparnisse und Lohneinkünfte der Konsumenten
$u(t)$	Arbeitslosenquote zum Zeitpunkt t
$E(t)$	Erwerbstätigenquote zum Zeitpunkt t : $E(t) + u(t) = 1$
Θ	Maximal erlaubter Verschuldungsgrad einer Firma

8.2 Anmerkungen zur Stochastischen Kontinuierung

Es folgen hier einige Anmerkungen zu den durchgeführten Stochastischen Kontinuierungen in Abschnitt 2.6.3. Es wurde für das Modell Mark 0 jeweils $N_F = 200$ Firmen betrachtet mit weiteren Parametern $\mu = 1$, $c = 0.5$, $\beta = 0$, $\gamma_p = 0.05$, $\gamma_W = 0$, $\delta = 0.02$, $\varphi = 0.1$, $f = 1$ und $\Theta = 8$, wobei R dadurch variiert wurde, dass $\eta_- = 0.1$ beibehalten wurde und η_+ entsprechend geändert wird. Die in Abbildung 17 dargestellten Ergebnisse

wurden mit dem in [7] beschriebenen, noch unveröffentlichten Programm der Stochastischen Kontinuierung erzielt, indem dort als Obergrenze der Iterationsschritte pro System bis zu 15000 Zeitschritte betrachtet wurden. Für den Graphen, dessen Nullstelle dem neuen Fixpunkt entspricht, wurde eine Steigung von $\text{slope}_{\text{desired}} = 0.15$ gefordert, als maximale Ensemblegröße wurde $M_{\text{max}} = 100$ gewählt.

8.3 Code von Mark 0

Nachfolgend ist der Code von Mark 0 in der Sprache python aufgeführt. Angepasst an die Stochastische Kontinuierung wird hier bereits zwischen Lifting, Evolving und Restricting unterteilt. Hierbei wird in der Funktion Lifting eine Matrix ausgegeben, die die Informationen über die N_F Firmen enthält. Die Funktionen „UpdateProdDemand“ und „Overview“ werden von der Funktion Evolving genutzt. Diese erhält die Matrix der Firmen als „companiesOriginal“ und lässt sie sich für „Time“ Zeitschritte unter dem eingegebenen Parameter „Eta0Plus“ (η_+) entwickeln. Anmerkungen und Unterteilungen des Codes werden durch #-Zeichen gekennzeichnet.

```

import numpy as np
import random
import math
from random import randint
import copy

def first_structure_lifting(x_guess_0):
    # x_guess_0: initial/assumed unemployment

    global Nf, Mu, C, Beta, GammaP, GammaW,
        Eta0PlusIni, Eta0Minus, Delta, Theta,
        PhiLowercase, f
    Nf = 200          # Number of firms
    Mu = 1.0         # Number of households = mu*Nf
    C = 0.5          # Consumption budget = c * (
                    savings + wage income)

```

```

Beta = 0.0          # Price sensitivity
GammaP = 0.05
GammaW = 0         # necessary for wage update
Eta0PlusIni = 0.01
Eta0Minus = 0.1   # Eta+: Hiring, Eta-: Firing
                  propensity
Delta = 0.02      # Dividend
Theta = 8.        # Firms with indeptment level
                  CapitalPhi >= Theta go bankrupt
PhiLowercase = 0.1 # Probability to revive a firm
f = 1.01          # 1-f is probability of a bankrupt
                  firm being bailed out by the households

```

```

Arr = np.empty((Nf,9))

```

```

Arr[:,0]=1.0 # Wages
Arr[:,1] = 1.0+0.2*np.random.uniform(-0.5,0.5, size
=Nf) # prices
Arr[:,2] = Mu*((1-x_guess_0[0]) +0.1*np.random.
uniform(-0.5,0.5, size=Nf)) # Production Y
Arr[Arr[:,2] > Mu,2] = Mu # prevent employment >100%
Arr[Arr[:,2] < 0,2] = 0 # no negative employment
Arr[:,3] = Arr[:,0]*Arr[:,2]*2.0*np.random.uniform
(0.0,1.0, size=Nf) # Epsilon: Savings of
companies
Arr[:,4] = Arr[:,2]*Arr[:,1] # Profits
Arr[:,5] = 1.0 # 1 means company not bankrupt
Arr[:,6] = np.arange(Nf) # Number of company
Arr[:,7] = 0.0 # U_Tilde: available employers
Arr[:,8] = Arr[:,2] # Demand

```

```

return(Arr)

```

```

#####

```

```

def UpdateProdDemand(Prod, Dem, UT, price, Wage, Prof,
    Eta0PlusU): # Updating Y, Demand and Wage

    # Dummy Vectors
    ProdD = np.copy(Prod)
    priceD = np.copy(price)

    ProUnDem = Prod < Dem
    ProOvDem = Prod > Dem
    pUnPo = price < POverlined
    pOvPo = price > POverlined

    #if Prod < Dem:
    ProdD[ProUnDem] = Prod[ProUnDem] + np.minimum(
        Eta0PlusU * (Dem[ProUnDem] - Prod[ProUnDem]), Mu * UT
        [ProUnDem])

    # if Prod < Dem and price < POverlined
    priceD[np.logical_and(ProUnDem, pUnPo)] = price[np.
        logical_and(ProUnDem, pUnPo)] * (1 + GammaP * np.
        random.uniform(0.0, 1.0, size = len(price[np.
        logical_and(ProUnDem, pUnPo)])))

    # Prod > Dem
    ProdD[ProOvDem] = np.maximum(np.zeros(len(Prod[
        ProOvDem])), Prod[ProOvDem] + Eta0Minus * (Dem[
        ProOvDem] - Prod[ProOvDem]))

    # Prod > Dem and price > POverlined
    priceD[np.logical_and(ProOvDem, pOvPo)] = price[np.
        logical_and(ProOvDem, pOvPo)] * (1.0 - GammaP * np.
        random.uniform(0.0, 1.0, size = len(price[np.

```

```

        logical_and(ProOvDem, pOvPo))))))

    return(ProdD, Dem, UT, priceD, Wage, Prof)

def Overview(companies):

    Un = 1.0-np.sum(companies[:,2])/(Mu*Nf) #
        unemployment rate
    Em = 1.0-Un # Employment rate
    if np.sum(companies[:,2])>0):
        PO = np.sum(companies[:,2]*companies[:,1])/np.
            sum(companies[:,2]) # reference price
        WO = np.sum(companies[:,0]*companies[:,2])/np.
            .sum(companies[:,2]) # reference wage
    else:
        PO = 1.
        WO = 1.

    CB = C*(max(S,0)+np.sum(companies[:,0]*companies
       [:,2]))
    return([Un, Em, PO, WO, CB])

#####

# Real evolving starts now

def evolving(companiesOriginal, Time, Eta0Plus):

    global S, U, EpsEmpl, POverlined, WOverlined,
        CBudget

```



```

Eta0Plus = Eta0Plus*0.1
companies = np.copy(companiesOriginal)

S = Nf-np.sum(companies[:,3])

for t in range(Time):

    # Average company size

    [U, EpsEmpl, POverlined, WOverlined, CBudget]
    = Overview(companies)

    # UTilde
    companies[:,7] = np.exp(Beta*companies[:,0]/
        WOverlined)*Nf*U/np.sum(companies[:,5]*np.
        exp(Beta*companies[:,0]/WOverlined))

    # Regard only solvent companies
    ComSolvent = companies[companies[:,5]==1.0,: ]

    Prodn, Demn, UTn, pricen, Wagen, Profn =
        UpdateProdDemand(ComSolvent[:,2],
            ComSolvent[:,8], ComSolvent[:,7],
            ComSolvent[:,1], ComSolvent[:,0],
            ComSolvent[:,4], Eta0Plus)

    companies[companies[:,5]==1.0,2] = Prodn
    companies[companies[:,5]==1.0,8] = Demn
    companies[companies[:,5]==1.0,7] = UTn
    companies[companies[:,5]==1.0,1] = pricen
    companies[companies[:,5]==1.0,0] = Wagen
    companies[companies[:,5]==1.0,4] = Profn

```

```
# Update overview of economy
```

```
[U, EpsEmpl, POverlined, WOverlined, CBudget]  
= Overview(companies)
```

```
companies[:,8] = CBudget*companies[:,5] * np.  
exp(-Beta *companies[:,1]/POverlined) / (  
companies[:,1]*np.sum(companies[:,5]*np.exp  
(-Beta-companies[:,1]/POverlined)) )
```

```
# Accounting
```

```
Sol2 = companies[:,5]==1.0 # logical
```

```
# Profits
```

```
companies[Sol2,4] =companies[Sol2,1]*np.  
minimum(companies[Sol2,2], companies[Sol2  
,8])-companies[Sol2,0]*companies[Sol2,2]  
S = S-np.sum(companies[Sol2,4])
```

```
# Epsilon
```

```
companies[Sol2,3] = companies[Sol2,3]+  
companies[Sol2,4]
```

```
#Dividends
```

```
Sol3 = np.logical_and(companies[:,5] == 1.0,  
companies[:,4] >0.0, companies[:,3] >0.0) #  
logiac vector  
S = S+ Delta*np.sum(companies[Sol3,4])  
companies[Sol3,3] = companies[Sol3,3] -Delta*  
companies[Sol3,4]
```

```
# Healthy Companies
```

```

Healthy = np.logical_and(companies[:,3] >
    Theta*companies[:,0]*companies[:,2],
    companies[:,5] == 1.0)

Deficit = 0.0

# NOW: Firms going bankrupt or being saved

for i in np.arange(Nf):

    Chance = np.random.uniform(0.0,1.0)
    if companies[i,5] == 1.0 and companies[i
        ,3] < - Theta*companies[i,2]*companies[
        i,0]:
        if len(companies[Healthy,1]>0):
            j = randint(1,len((companies[
                Healthy,1]>0)))
            HF = companies[Healthy,:]
            k = int(HF[j-1,6]) # selecting
                number of jth healthy company
            HCom = companies[k,:]
            if HCom[3]>-companies[i,3]:
                if Chance < 1-f: # k saves i
                    companies[k,3] +=
                        companies[i,3]
                    companies[i,3] = 0
                    companies[i,0] = companies
                        [k,0]
                    companies[i,1] = companies
                        [k,1]
                elif Chance >1-f:
                    Deficit = Deficit -
                        companies[i,3]

```

```

        companies[i,5] = 0.0 # i
            goes bankrupt
        companies[i,2] = 0.0
        companies[i,3] = 0.0
    elif HCom[3] < -companies[i,3]: #
        HCom does not have enough money
        to bail out Company[i]
        Deficit -= companies[i,3]
        companies[i,5] = 0.0 # i goes
            bankrupt
        companies[i,2] = 0.0
        companies[i,3] = 0.0

    else: # no healthy companies
        Deficit -= companies[i,3]
        companies[i,5] = 0.0 # i goes
            bankrupt
        companies[i,2] = 0.0
        companies[i,3] = 0.0

```

Revivals

```

Eps_Plus = 0.0
for i in np.arange(Nf):
    Chance = np.random.uniform(0.0,1.0)
    if companies[i,5] == 0.0 and Chance <
        PhiLowercase:
        companies[i,5] = 1.0
        companies[i,1] = POverlined
        companies[i,2] = Mu*U*np.random.
            uniform(0.0,1.0)
        companies[i,3] = companies[i,0]*
            companies[i,2]
        Deficit = Deficit + companies[i,3]

```

```

        if companies[i,5] ==1.0 and companies[i
        ,3]>0.0:
            Eps_Plus += companies[i,3]

# Housholds cannot be indebted
    if Deficit>S:
        Deficit = Deficit-S
        S = 0.0

    healthiest= np.logical_and(companies
        [:,5]==1.0, companies[:,3]>0.0)
    if Eps_Plus>0:
        companies[healthiest,3] = companies[
            healthiest, 3] - Deficit*companies[
            healthiest,3]/Eps_Plus

    else:
        S = S-Deficit

    return companies

#####

def restricting(companies):

    Un = 1.0-np.sum(companies[:,2])/(Mu*Nf)#
        unemployment rate

    return(Un)

```